Concepts et Model Checking – TD 3 – Solutions

Question 1 Sémantique de CTL

On considère la structure de Kripke suivante, avec $AP = \{p, q, r\}$.

Calculer les états satisfaisant les formules suivantes :

1. $[\![\mathsf{EG}\ r]\!] = \{6, 8\}$
2. $[\![\mathsf{AX}\ q]\!] = \{2, 4, 8\}$
3. $[\![\neg q \wedge \mathsf{EX}\ q]\!] = \{2\}$
4. $[\![\mathsf{EF}\ p]\!] = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$
5. $[\![\mathsf{AF}\ p]\!] = \{1, 4\}$

Question 2 – Hiérarchie de AG et EF

1. Solutions :
   — $[\![\mathsf{EF}\, p]\!] = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ et $[\![\mathsf{AG}\, p]\!] = \{7\}$;
   — $[\![\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\, p]\!] = \{3, 4, 6, 7\}$ et $[\![\mathsf{EF}\,\mathsf{AG}\, p]\!] = \{1, 4, 7\}$;
   — $[\![\mathsf{EF}\,\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\, p]\!] = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ et $[\![\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\mathsf{AG}\, p]\!] = \{4, 7\}$.
2. Les deux implications sont vraies.
   — Un état s satisfaisant $\mathsf{EF}\,\mathsf{AG}\, p$ est à l'origine d'un chemin ménant à un état s' satisfaisant $\mathsf{AG}\, p$, et du coup s' satisfait p aussi.
   — Si un état s satisfait $\mathsf{AG}\, p$, alors tous les états accessibles depuis s satisfont $\mathsf{AG}\, p$ et du coup aussi $\mathsf{EF}\,\mathsf{AG}\, p$. Alors s satisfait $\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\mathsf{AG}\, p$.
3. Rappellons que $\mathsf{EF}\,\mathsf{EF}\, p \equiv \mathsf{EF}\, p$ et $\mathsf{AG}\,\mathsf{AG}\, p \equiv \mathsf{AG}\, p$. Dans les deux cas, pour le sens $\Rightarrow$ il suffit alors d'appliquer le résultat $\mathsf{EF}\,\mathsf{AG}\, p \Rightarrow \mathsf{EF}\, p$ de (b). Pour le sens $\Leftarrow$ il suffit d'utiliser $\mathsf{AG}\, p \Rightarrow \mathsf{AG}\,\mathsf{EF}\,\mathsf{AG}\, p$.

Question 3 – Spécification en CTL

Remarque : Il s'agit d'une exercice de modélisation. Du coup, il n'y a pas de seule solution correcte, d'autant que le langage naturel utilisé pour les spécifications est souvent ambigu. La formalisation en logique temporelle sert justement à donner un sens précis à une spécification. La question si cette formulation correspond au sens voulu d'une spécification peut se discuter.

Ceci dit, étant donné les énoncés, il semble raisonnable d'utiliser les propositions atomiques suivantes, pour $i = 1, 2$, qui seront vrai ou faux à un moment donné :

— p_i : L'ascenseur s'est arrêté au niveau i et la porte y est ouverte.
— a_i : L'ascenseur est au niveau i (mais peut-être sans s'arrêter).
— b_i : Un utilisateur tape sur le bouton au niveau i.
— v_i : Le voyant au niveau i est allumé.

Voici une formulation des propriétés en CTL (en supposant que les propriétés doivent toujours être vraies, et à tous les niveaux). À noter qu'on peut se donner le droit de quantifier sur des indices à domaine fini car cela ne change point l'expressivité ; p.ex. $\bigwedge_{i=1}^{2} p_i$ serait simplement un raccourci pour $p_1 \wedge p_2$.

1. $\bigwedge_{i=1}^{2} \mathsf{AG}\,(p_i \to a_i)$
2. $\bigwedge_{i=1}^{2} \mathsf{AG}\,(b_i \to (v_i\,\mathsf{AU}\,p_i))$
3. $\bigwedge_{i=1}^{2} \mathsf{AG}\,(p_i \to v_i)$
4. $\mathsf{AG}\,\big(\big(\bigwedge_{i=1}^{2} \neg v_i\big) \to \big(\bigwedge_{i=1}^{2}(a_i \to \mathsf{AX}\,a_i)\big)\big)$
5. C'est déjà une conséquence de la formalisation de la seconde propriété.