

Examen – Concepts et Model-Checking

2 mars 2026

1 Spécification

On considère un circuit logique avec un signal d'entrée x , un signal de sortie y et deux signaux internes r_1, r_2 . À tout moment un signal vaut 0 ou 1, du coup on note $AP = \{x, y, r_1, r_2\}$. Traduire les spécifications informelles en une formule temporelle sur AP :

- (a) "Il est impossible d'avoir deux 1 consécutives dans la sortie."
- (b) "Si le signal d'entrée vaut 1, au plus deux tics plus tard la sortie vaut 1."
- (c) "Si le signal d'entrée vaut 1, les registres restent inchangés entre le tic actuel et le tic suivant."
- (d) "Le registre r_1 vaut 1 infiniment souvent."

Vous pouvez donner des formules de LTL ou CTL, au choix. Il est possible que certaines spécifications se prêtent à plusieurs interprétations différentes (c'est tout l'intérêt des spécifications formelles !), en cas de doute justifiez votre réponse.

Solution :

Toutes les propriétés s'expriment dans les deux logiques, voici des exemples dans LTL. D'ailleurs plusieurs traductions sont possibles dans certains cas car les spécifications informelles sont justement un peu imprécis (p.ex. la première propriété, doit elle tenir dans toujours ou juste au début ?). Toute interprétation "raisonnable" sera acceptée.

- (a) $\mathbf{G} (\neg y \vee \mathbf{X} \neg y)$
- (b) $\mathbf{G} (x \rightarrow (\mathbf{X} y \vee \mathbf{X} \mathbf{X} y))$
- (c) $\mathbf{G} (x \rightarrow (r_1 \leftrightarrow \mathbf{X} r_1 \wedge r_2 \leftrightarrow \mathbf{X} r_2))$
- (d) $\mathbf{G} \mathbf{F} r_1$

2 Expressivité

Fixons un seul prédicat p , du coup $AP = \{p\}$ et $2^{AP} = \{\emptyset, \{p\}\}$. Pour chacun des langages L_i suivants, donner une formule LTL ϕ_i telle que $\llbracket \phi_i \rrbracket = L_i$.

- (a) $L_1 = \{p\}^* \emptyset^\omega$;
- (b) $L_2 = \{p\}^n \emptyset^\omega$, pour une constante $n \geq 1$ quelconque ;
- (c) $L_3 = (\{p\} \cdot \emptyset)^\omega$.

Dessiner des automates de Büchi qui acceptent L_1 et L_3 . (La construction de ces automates peut être ad-hoc, la construction systématique présentée pendant le cours n'est ni exigée ni recommandée.)

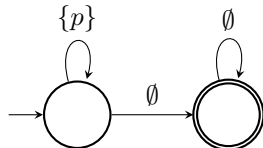
Solution :

Dans les deux premiers cas, il faut assurer que p reste vrai pendant une période puis devient faux à jamais.

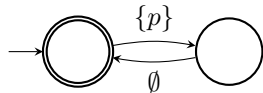
- (a) $p \mathbf{U} (\mathbf{G} \neg p)$
- (b) $(p \mathbf{U} (\mathbf{G} \neg p)) \wedge \mathbf{X}^{n-1} \neg p \wedge \mathbf{X}^n \neg p$
- (c) $p \wedge \mathbf{G} (p \leftrightarrow \mathbf{X} \neg p)$

À noter que le troisième pas n'est pas identique à celui discuté en classe qui ne s'exprime pas en LTL ("p tient dans les positions paires") car dans ce cas-là la valeur de p est indéterminée sur les positions impaires.

Automate pour L_1 :



Automate pour L_3 :

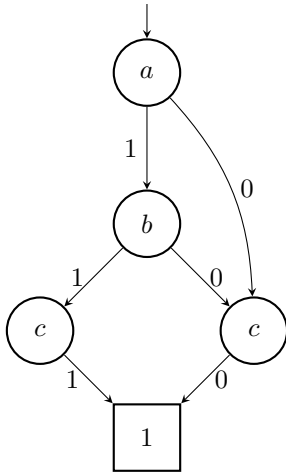


3 Diagrammes de décision binaires

On considère l'ordre de variables $a \prec b \prec c$.

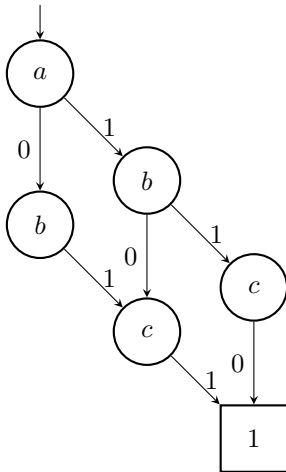
(a) Dessiner un BDD pour $F \equiv (a \wedge b) \leftrightarrow c$.

Solution :



(b) Dessiner un BDD pour $G \equiv (a + b + c = 2)$.

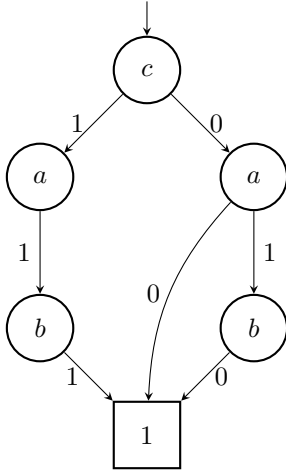
Solution :



- (c) Pour F et G , peut-on trouver un ordre différent qui résulte en un BDD avec un nombre différent de sommets ? Le cas échéant, le dessiner, sinon pourquoi pas ?

[3]

Solution : Pour F , il convient de choisir $c \prec a \prec b$ ce qui donne un sommet de plus.



Par contre, G est une fonction entièrement symétrique, tous les ordres donnent un BDD de la même taille.

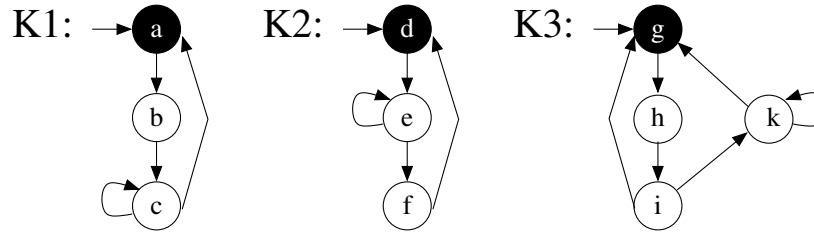
4 Bisimulation

On considère les structures $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ ci-dessous. Les états noirs satisfont p , et les états blancs ne satisfont pas p .

Pour chaque paire $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$, avec $i, j \in \{1, 2, 3\}$ et $i \neq j$, déterminer si $\mathcal{K}_i \equiv \mathcal{K}_j$. Dans le cas positif, donner une relation de bisimulation. Dans le cas négatif, trouver une formule CTL (avec **EX**, **AX** comme seules modalités temporelles) qui les distingue.

Pour rappel, si S_i, S_j sont les états de $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ respectivement, et r_i, r_j les états initiaux, une *bisimulation* est une relation $H \subseteq S_i \times S_j$ telle que

- (i) $\langle r_i, r_j \rangle \in H$;
- (ii) pour tout $\langle s, t \rangle \in H$, on a $\nu(s) = \nu(t)$;
- (iii) pour tout $\langle s, t \rangle \in H$ et $s \rightarrow s'$, il existe $t' \in S_j$ tel que $t \rightarrow t'$ et $\langle s', t' \rangle \in H$;
- (iv) pour tout $\langle s, t \rangle \in H$ et $t \rightarrow t'$, il existe $s' \in S_i$ tel que $s \rightarrow s'$ et $\langle s', t' \rangle \in H$.



Solution :

\mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_3 sont bisimilaires, avec la relation $H = \{\langle a, g \rangle, \langle b, h \rangle, \langle c, i \rangle, \langle c, k \rangle\}$. On vérifie facilement que toutes les conditions d'une bisimulation sont remplies.

Par contre, \mathcal{K}_2 n'est pas bisimilaire aux deux autres, p.ex. \mathcal{K}_2 satisfait **EX EX AX p** mais pas \mathcal{K}_1 ni \mathcal{K}_3 .