Distance exacte dans les graphes α-doublants

Loïg JEZEQUEL

Stage effectué au LABRI sous la direction de Cyril GAVOILLE.

7 septembre 2007

Introduction

Lorsque l'on étudie les graphes il est souvent crucial de :

- savoir calculer des distances.
- savoir le faire de façon rapide.

Or les méthodes traditionnelles sont globales, donc peu adaptées aux grands graphes.

Introduction

Il est potentielement intéressant d'utiliser d'autres méthodes, ayant une approche locale du calcul de distance car :

- les graphes utilisés actuellement peuvent être gigantesque (internet) : approche globale peu adaptée.
- les réseaux pair à pair, notamment, ont une structure adaptée à des méthodes locales.

Introduction

C'est pourquoi nous nous sommes orientés vers :

- une méthode locale : l'étiquetage des sommets.
- une classe de graphes rencontrée dans les grands graphes réels : les graphes α-doublants.

Origines et intérêts de l'étiquetage de sommets

- Introduit par Breuer et Folkman pour calculer l'adjacence entre deux sommets.
- Utilisé ensuite pour résoudre d'autres problèmes : distance, routage...
- Méthode intéréssante car locale et adaptée aux réseaux pair à pair.

Principe de l'étiquetage de sommets

L'étiquetage de sommets consiste à associer à chaque sommet d'un graphe une certaine quantité d'information pour pouvoir ensuite en tirer un résultat.

Trois valeurs sont primordiales :

- la taille des étiquettes.
- le temps nécessaire à les exploiter.
- le temps nécessaire pour les calculer.

Formalisme de l'étiquetage des distances

Soit G un graphe, $u, v \in G$, $d_G(u, v)$ est la distance (c'est à dire la longueur du plus court chemin) de u àv dans G.

fonction d'étiquetage

Soit L une fonction dite d'*étiquetage* associant à u un entier non nul $L(u, G)$.

décodeur

Soit f une fonction dite *décodeur* qui, étant donnés deux entiers positifs λ_1 et λ_2 retourne $f(\lambda_1, \lambda_2)$.

étiquetage de distance

$\langle L, f\rangle$ est un *étiquetage de distance* pour G si $f(L(u, G), L(v, G)) = d_G(u, v)$ pour n'importe quels sommets $u, v \in G$.

1. Étiquetage des distances
2. Un exemple simple : l'étiquetage des distances dans un arbre
3. Graphes à croissance bornée et graphes α-doublants

Fondements de l'exemple

Cet exemple repose sur le fait que l'on peut trouver, dans tout arbre, un unique sommet qui, une fois retiré, sépare l'arbre en plusieurs parties, toutes de taille $\leq n/2$.

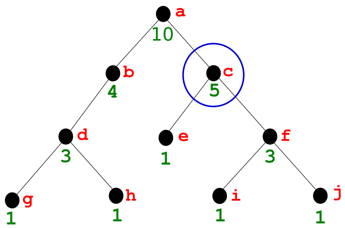
On peut donc séparer un arbre en sommets isolés en $O(\log_2(n))$ étapes.

Ceci va nous être très utile et nous garantir une taille d'étiquette raisonable.

Méthode pour trouver le sommet en question

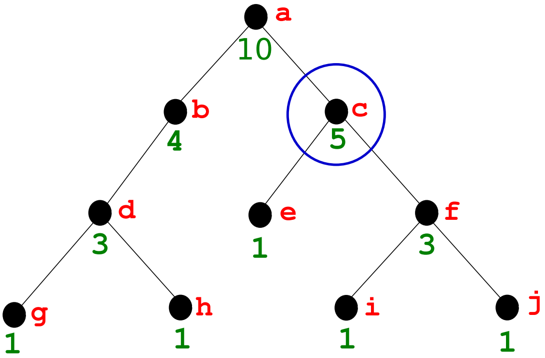
On utilise un algorithme très simple :

1. On associe chaque sommet à un nombre de la manière suivante : 1 pour les feuilles, la somme des valeurs de ses fils plus 1 pour chaque autre sommet.
2. On part ensuite de la racine de l'arbre et on le parcourt suivant un algorithme simple : tant que le sommet en cours est associé à une valeur $> n/2$ et qu'il a un fils de valeur $\geq n/2$ on se place sur ce fils.



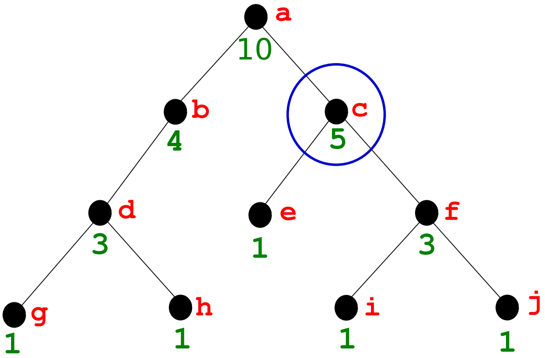
Utilisation de la propriété pour étiqueter les sommets

a :	d :	g :	j :
b :	e :	h :	
c :	f :	i :	



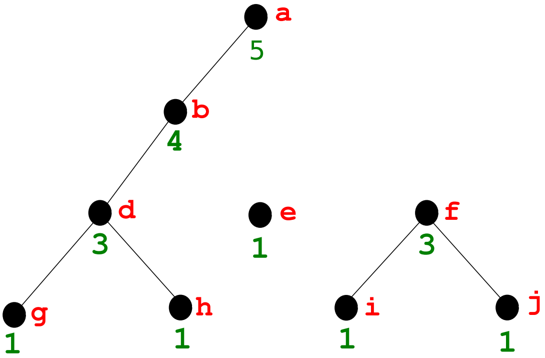
Utilisation de la propriété pour étiqueter les sommets

a : c1	d : c3	g : c4	j : c2
b : c2	e : c1	h : c4	
c : c0	f : c1	i : c2	



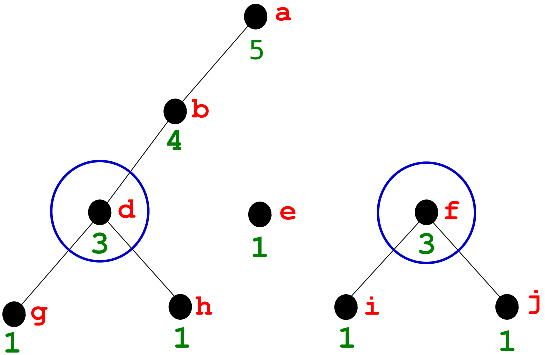
Utilisation de la propriété pour étiqueter les sommets

a : c1	d : c3	g : c4	j : c2
b : c2	e : c1	h : c4	
c : c0	f : c1	i : c2	



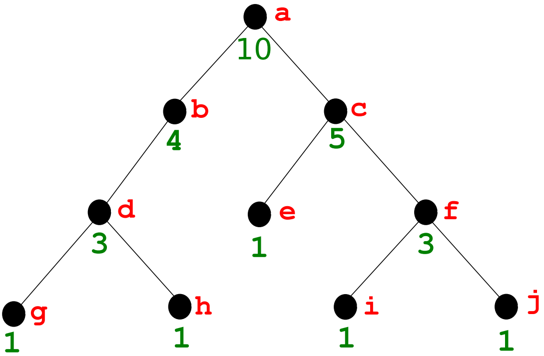
Utilisation de la propriété pour étiqueter les sommets

a : c1	d : c3	g : c4	j : c2
b : c2	e : c1	h : c4	
c : c0	f : c1	i : c2	



Utilisation de la propriété pour étiqueter les sommets

a : c1, d2, b1	d : c3, d0	g : c4, d1	j : c2, f1
b : c2, d1, b0	e : c1	h : c4, d1	
c : c0	f : c1, f0	i : c2, f1	



Séparateur

Il est donc très utile de pouvoir séparer un graphe en plusieurs parties par le retrait d'un nombre peu important de sommets, un séparateur. De manière formelle :

Séparateur

Soit G un graphe à n sommets. Un ensemble S de sommets de G est un *séparateur* si son retrait du graphe sépare G en composantes connexes de taille au plus $f(n)$.

$r(n)$-séparateur

Une famille $\mathcal{G}$ de graphes possède un $r(n)$-séparateur si $\forall G \in \mathcal{G}_n$ connexe $\exists S$ séparateur de taille au plus $r(n)$ tel que toute composante connexe de $G \setminus S$ appartienne à $\mathcal{G}$.

1. Étiquetage des distances

2. Un exemple simple : l'étiquetage des distances dans un arbre

3. Graphes à croissance bornée et graphes α-doublants

Intérêts de l'étude

Les graphes α-doublants possèdent deux intérêts majeurs ayant motivé notre étude :

- tout sous graphe d'un graphe α-doublant est lui aussi α-doublant.
- les très grands graphes rencontrés actuellement (internet, web, réseaux pair à pair) sont α-doublants.

Définitions

dimension doublante

La *dimension doublante* d'un graphe est la plus petite valeur α telle que toute boule (fermée) de rayon $2r$ peut être recouverte par 2^α boules (fermées) de rayon r.

graphe α-doublant

Un graphe est dit *α-doublant* lorsque sa dimension doublante α est telle que $\alpha = 0(1)$.

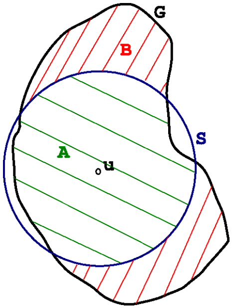
Les graphes à croissance bornée sont un sous-ensemble des graphes α-doublants :

graphe à croissance bornée

Un graphe G est à croissance bornée si et seulement si : $\forall p \in V$, $|B_p(r)| \leq 2^\rho |B_p(r/2)|$ où V est l'ensemble des sommets de G.

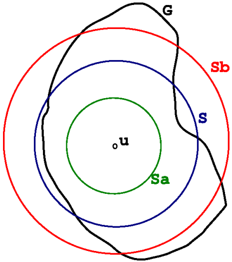
Un séparateur pour les graphes à croissance bornée

Pour les graphes à croissance bornée on propose le séparateur suivant : à partir d'un sommet quelconque on trouve la plus petite boule le prenant pour centre et contenant plus de la moitié des sommets du graphe.
Le bord de cette boule sera utilisé comme séparateur.



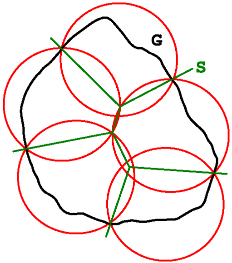
Un problème ?

Il reste un problème : les graphes à croissance bornée n'ont pas les mêmes propriétés que les grapges α-doublants. Il est donc peu probable que notre séparateur soit un $r(n)$-séparateur.
Pour résoudre ce problème on va trouver tous les séparateurs à partir du graphe d'origine plutôt que de les chercher dans les graphes obtenus successivement.



Le cas des graphes α-doublants

On propose aussi un séparateur pour les graphes α-doublants : celui-ci serait constitué des bords des boules couvrant le graphe.



Si ce séparateur s'avère bon il sera automatiquement un bon $r(n)$-séparateur.

Conclusion

Nous avons proposé deux séparateurs, l'un pour les graphes à croissance bornée et l'autre pour les graphes α-doublants.

Si ces séparateurs s'avèrent utilisables (on n'a pas pu montrer s'ils étaient réelement suffisamment petits) on pourra, par un algorithme simple, réaliser un étiquetage efficace des distances dans ces types de graphes.

Conclusion

Il serait aussi intéressant d'étudier ce qui se passerait en cas de modification de la topologie du graphe (comme dans les réseaux pair à pair) :

- faudrait-t-il recalculer toutes les étiquettes ?
- est-il possible de trouver une méthode utilisant l'aspect local de l'étiquetage pour modifier uniquement quelques étiquettes ?