

Distance exacte dans les graphes α -doublants

Loïc JEZEQUEL

30 août 2007
revu le 28 février 2008

Résumé

Dans cet article nous expliquons la notion d'étiquetage des sommets dans un graphe et nous donnons quelques résultats connus à ce sujet. Nous exposons ensuite la notion de séparateur d'un graphe et son intérêt pour ce qui est de l'étiquetage de distances, en nous appuyant sur un exemple concret : son utilisation dans un arbre. Enfin nous exposons deux pistes pour trouver des séparateurs utiles dans un type de graphes particulier, dits α -doublants.

Introduction

Il est fréquent en informatique de devoir calculer la distance entre deux sommets d'un graphe. Pour de nombreux problèmes actuels, notamment le routage dans les très grands graphes (internet, réseaux pair à pair...), il est même nécessaire de pouvoir obtenir cette distance de manière très rapide. Comme souvent, il faut faire un choix entre rapidité de calcul et taille de donnée stockée. Les méthodes actuelles, globales, nécessitent bien souvent d'avoir une vision d'ensemble du graphe étudié - avec tous les inconvénients que cela apporte dans les cas concrets (évolution des réseaux pair à pair dans le temps, très grande taille des graphes réels...) - ou bien donnent des approximations de la distance au lieu d'une valeur exacte.

La notion d'étiquetage des sommets, introduite par Breuer et Folkman pour résoudre des problèmes d'adjacence, pourrait apporter des solutions nouvelles et intéressantes au problème du calcul de la distance (exacte ou non) dans les très grands graphes car il s'agit d'une méthode locale, ne nécessitant pas la connaissance de tout le graphe mais seulement de la partie étudiée de celui-ci. La notion d'étiquetage en général a été traitée notamment par Cyril Gavoille et David Peleg dans l'article [1].

Ce calcul de distance par étiquetage des sommets a déjà été étudié dans de nombreuses classes de graphes [2]. Cependant le cas des réseaux α -doublants n'a pas encore été traité (en tout cas du point de vue de la distance exacte, on peut trouver des travaux sur le routage dans de tels graphes dans l'article [3]), nous avons donc décidé de nous intéresser à ce type de graphes, qui présentent plusieurs intérêts ayant motivé cette étude.

La première partie présentera la notion d'étiquetage des sommets, et plus particulièrement pour le calcul de distances exactes. Puis, la deuxième partie traitera de la notion de séparateur qui s'avère très utile pour étiqueter les graphes. Enfin, la troisième et dernière partie exposera nos résultats concernant le calcul de la distance exacte dans les graphes α -doublants.

1 Étiquetage

1.1 Principe et origines

Le principe de l'étiquetage est d'associer à chaque sommet d'un graphe une étiquette contenant suffisamment d'informations pour pouvoir ensuite, à partir de celle-ci, obtenir les données souhaitées. Il existe bien sûr une méthode triviale pour réaliser ces étiquettes. Elle consiste à stocker toutes les données sur chaque sommet (par exemple pour un calcul de distance

chaque sommet connaîtrait sa distance à tous les autres, il suffirait ensuite étant donnés deux sommets de consulter l'un avec le nom de l'autre pour obtenir le résultat voulu). Mais il est évidemment possible (et souhaitable) de trouver des méthodes bien plus efficaces en terme de taille d'étiquette.

Cette idée d'étiqueter les sommets a été initialement introduite par Breuer et Folkman afin de pouvoir déterminer l'adjacence entre deux sommets d'un graphe en ne connaissant que l'étiquette de chacun d'entre eux. Elle a ensuite été développée pour obtenir d'autres informations sur les graphes : distance [2], schéma de routage [3]...

En fait, trois valeurs sont primordiales pour obtenir de manière efficace une information en étiquetant les sommets d'un graphe :

1. la taille des étiquettes (c'est-à-dire le nombre de bits nécessaires pour stocker la plus grande d'entre elles).
2. le temps nécessaire, étant données les étiquettes, à obtenir le résultat voulu (dans certains cas les étiquettes obtenues sont très petites mais un temps de décodage exponentiel est nécessaire [2]).
3. dans une moindre mesure peut être, tant qu'il reste raisonnable et dans le cas de graphes n'évoluant pas, le temps nécessaire pour mettre en place les étiquettes.

1.2 L'étiquetage des distances et son formalisme

Le principe de l'étiquetage des distances est le suivant : il faut associer à chaque sommet d'un graphe une étiquette de manière à être capable, uniquement à l'aide des étiquettes de deux sommets, de calculer la distance qui les sépare.

De manière plus formelle : étant donné un graphe G non orienté valué et deux sommets u et v , soit $d_G(u, v)$ la distance de u à v dans G , c'est-à-dire la valeur minimum d'un chemin allant de l'un à l'autre.

Une *fonction d'étiquetage* pour le graphe G est une fonction L qui associe à chaque sommet u de G un entier non nul $L(u, G)$.

Un *décodeur* est une fonction f qui, étant données deux étiquettes λ_1 et λ_2 (sans savoir de quel graphe elles proviennent), retourne $f(\lambda_1, \lambda_2)$. $\langle L, f \rangle$ est alors appelé un *étiquetage de distance* pour G si $f(L(u, G), L(v, G)) = d_G(u, v)$ pour n'importe quelle paire de sommets $u, v \in V(G)$. De manière plus générale, $\langle L, f \rangle$ est un *schéma d'étiquetage des distances* pour la famille de graphes \mathcal{G} si c'est un étiquetage de distance pour chacun des graphes $G \in \mathcal{G}$.

Il est clair qu'il existe un schéma d'étiquetage des distances pour toute famille de graphes quand la taille des étiquettes n'est pas limitée. Cependant

il est préférable d'essayer de trouver des étiquettes de taille la plus petite possible.

Il est nécessaire de définir quelques notions pour la suite :

La taille de l'étiquette $L(u, G)$ associée à u sera notée $|L(u, G)|$,

$$L_{max}(G) = \max_{u \in V(G)} |L(u, G)|.$$

Étant donnée \mathcal{G} une famille finie de graphes et un schéma d'étiquetage des distances $\langle L, f \rangle$ sur \mathcal{G} :

$$l_{\langle L, f \rangle}(\mathcal{G}) = \max\{L_{max}(G) | G \in \mathcal{G}\},$$

$$l(\mathcal{G}) = \min\{l_{\langle L, f \rangle}(\mathcal{G}) | \langle L, f \rangle \text{ est un schéma d'étiquetage des distances pour } \mathcal{G}\}.$$

1.3 Quelques résultats connus

Voici quelques résultats notables sur les bornes connues pour la taille des étiquettes dans différents types de graphes :

1. des bornes supérieures (majorations de $l(\mathcal{G}_n)$, \mathcal{G}_n étant la famille constituée des graphes à n sommets de \mathcal{G})
2. des bornes inférieures (minorations de $l(\mathcal{G}_n)$).

Winkler a montré dans [4] que pour la classe \mathcal{G} de tous les graphes,

$$l(\mathcal{G}_n) \leq 1.58n.$$

Dans [2] il est montré, pour la classe \mathcal{G}_n de tous les graphes à n sommets, qu'il existe un schéma d'étiquetage des distances $\langle L, f \rangle$ tel que :

$$l_{\langle L, f \rangle}(\mathcal{G}_n) \leq 11n + O(\log n \log \log n),$$

et qu'avec ce schéma la distance peut être calculée en un temps $O(\log \log n)$ et les étiquettes générées en un temps $O(n^2)$.

Toujours dans [2] il est montré, pour la famille \mathcal{G} des graphes possédant un $r(n)$ -séparateur (cette notion sera expliquée plus en détails dans la prochaine partie) :

$$l(\mathcal{G}_n) \leq O(R(n) \log n + \log^2 n),$$

où $R(n) = \sum_{i=0}^{\log_{3/2} n} r(n(2/3)^i)$. Et dans ce cas la distance peut être calculée en un temps $O(\log n)$.

Enfin [2] donne aussi quelques bornes inférieures. Ainsi, pour la famille \mathcal{T} des arbres binaires non valués par exemple :

$$l(\mathcal{T}_n) \geq \log^2 n / 8 - O(\log n).$$

Ou encore, pour la famille \mathcal{G} des graphes généraux :

$$l^s(\mathcal{G}_n) \geq n/2 - O(1),$$

avec le décodeur f défini tel que $d_G(u, v) \leq f(L(u, G), L(v, G)) \leq s.d_G(u, v)$ où s est un réel < 3 .

2 Séparateurs

2.1 Utilité des séparateurs en informatique en général et pour l'étiquetage des distances en particulier

Un séparateur est un ensemble de sommets d'un graphe qui séparent celui-ci en plusieurs parties de taille suffisamment petite. Un séparateur est particulièrement utile lorsqu'il peut être utilisé récursivement, c'est-à-dire quand les parties obtenues en séparant le graphe peuvent elles-même être séparées de la même façon, ainsi il devient possible de séparer un graphe de manière récursive en parties aussi petites que souhaité et ce en relativement peu d'étapes.

Les séparateurs peuvent être utilisés notamment dans les algorithmes de type diviser pour régner sur des graphes, il est en effet évident qu'il n'existe pas de chemin entre les parties du graphe obtenues après retrait des sommets du séparateur. C'est pour cette raison que les séparateurs ont été étudiés très tôt et qu'un bon nombre de résultats les concernant est connu.

Ainsi en 1984 il était déjà connu que les graphes planaires possèdent un séparateur de taille $O(\sqrt{n})$ et Gilbert, Hutchinson et Tarjan ont montré dans [5] que les graphes de genre borné, c'est-à-dire les graphes dessinables sur une sphère à laquelle g anses ont été ajoutées avec g entier, possèdent un séparateur de taille $O(\sqrt{gn})$.

Il est aussi connu, par exemple, que si K_r est un mineur exclu de G , c'est-à-dire si K_r ne peut pas être obtenu en ne faisant que supprimer des sommets ou des arêtes et contracter des arêtes dans G , alors G a un séparateur de taille $O(f(r).\sqrt{n})$, où K_r est le graphe complet à r sommets.

La notion de séparateur est très importante pour l'étiquetage des distances puisqu'elle induit une méthode simple et efficace pour le réaliser. Sur la figure 1 un graphe est représenté, deux parties indépendantes l'une de l'autre, A et B , y sont visibles, ainsi que le séparateur qui les a formées, S . La méthode d'étiquetage des distances consiste à stocker dans l'étiquette de chaque sommet de A (respectivement B) sa distance aux sommets de S . Ensuite il suffit de séparer à nouveau chaque sous-graphe et de stocker de même la distance de chaque élément de ce sous-graphe aux éléments de son

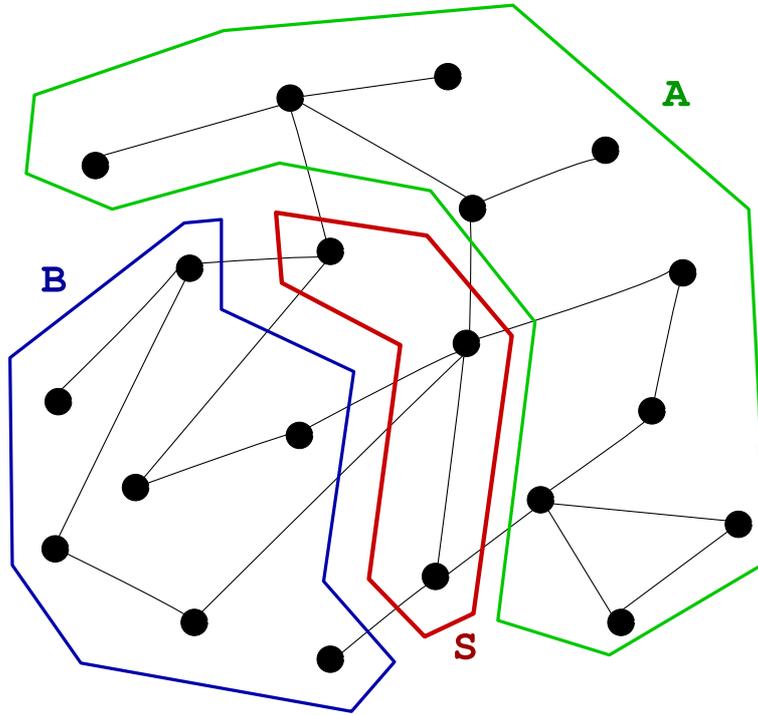


FIG. 1 – Exemple de séparateur (S).

séparateur. Ainsi, lorsque le graphe ne contient plus que des sommets isolés, des étiquettes suffisamment complètes pour pouvoir calculer n'importe quelle distance dans le graphe ont été produites. Cette distance se calcule alors de la façon suivante : pour deux sommets u et v il s'agit de trouver dans leurs étiquettes quel est leur dernier séparateur commun (c'est à dire à quel moment ils se sont retrouvés dans deux parties différentes du graphe). Puis leur distance se calcul simplement comme étant $\min\{d_G(u, s) + d_G(v, s) \mid s \in S\}$ où S est le séparateur commun. Il est clair qu'il est important d'avoir un séparateur qui retire le moins de sommets possible au graphe, tout en le séparant en parties à peu près de même taille (ainsi il sera préférable de séparer un graphe en deux parties, chacune de taille $\leq n/2$ plutôt qu'en une partie de taille $\geq n/2$ et une de taille $\leq n/2$) afin d'avoir des étiquettes les plus petites possible. Un exemple concret de cette méthode sera exposé un peu plus tard.

2.2 Formalisme : $r(n)$ -séparateur

Afin de définir exactement quel type de séparateurs sont nécessaires pour réaliser un étiquetage efficace des distances il convient de définir formellement la notion de $r(n)$ -séparateur.

Pour cela il faut tout d'abord définir précisément la notion de séparateur. Pour un graphe G à n sommets, un ensemble S de sommets de G est un *séparateur* si son retrait sépare G en composantes connexes de taille au plus $f(n)$, f dépendant du séparateur (par exemple pour trouver le résultat sur les séparateurs exposé dans la première partie la fonction utilisée était $f(n) = 2n/3$ [2]).

De cette notion découle celle de $r(n)$ -séparateur : une famille de graphes \mathcal{G} possède un $r(n)$ -séparateur si pour tout graphe connexe $G \in \mathcal{G}_n$ il existe un séparateur S de taille au plus $r(n)$ tel que toute composante connexe du graphe $G \setminus S$ appartienne à \mathcal{G} .

2.3 Un exemple : distance exacte dans un arbre

Afin d'éclaircir la notion de séparateur et son utilité pour l'étiquetage des distances voici un exemple simple de son utilisation : le calcul de la distance exacte dans un arbre. Ce calcul repose sur le fait que les arbres possèdent un excellent séparateur. En effet il est possible de séparer un arbre en composantes connexes de taille au plus $\lceil n/2 \rceil$ (et qui sont évidemment toutes des arbres) en lui retirant un unique sommet.

Il est possible, à l'aide d'un algorithme simple de trouver un sommet réalisant cette séparation. Il faut commencer par numéroter les sommets de la façon suivante : toutes les feuilles prennent la valeur 1 puis chaque autre sommet prend pour valeur la somme des valeurs de ses fils augmentée de 1, comme sur l'exemple de la figure 2.

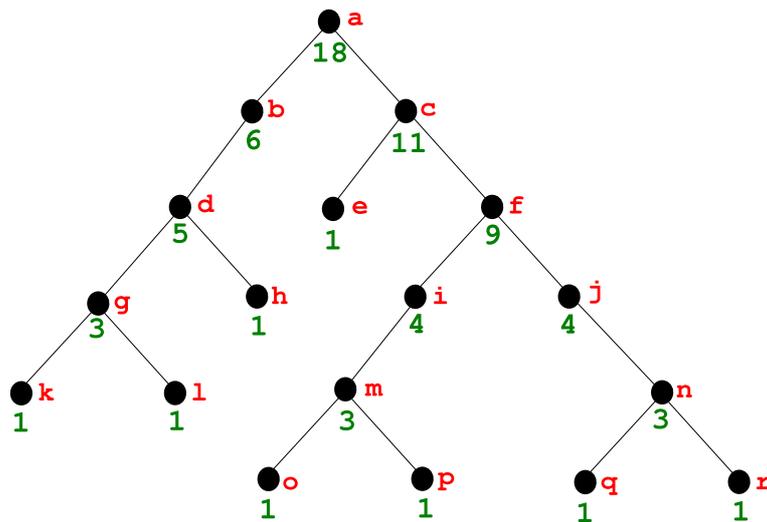


FIG. 2 – arbre préparé pour l'algorithme 1

algorithme 1 trouver sommet

```

 $u \leftarrow \text{racine}(A)$ 
tant que  $v(u) > n/2$  et  $\exists f$  fils de  $u$  tel que  $v(f) \geq n/2$  faire
   $u \leftarrow f$ 
fin tant que
retourner  $u$ 
  
```

Le sommet à retirer se trouve alors de la façon décrite dans l'algorithme 1, qui prend en entrée un arbre A et donne en sortie le sommet en question. Une fois ce sommet trouvé, il suffit de garder dans l'étiquette de chacun des autres sommets sa distance à celui-ci. Le séparateur est ensuite retiré, puis la même opération est effectuée dans chacun des arbres obtenus, et ainsi de suite pour, à la fin, n'avoir plus que des sommets isolés (figure 3).

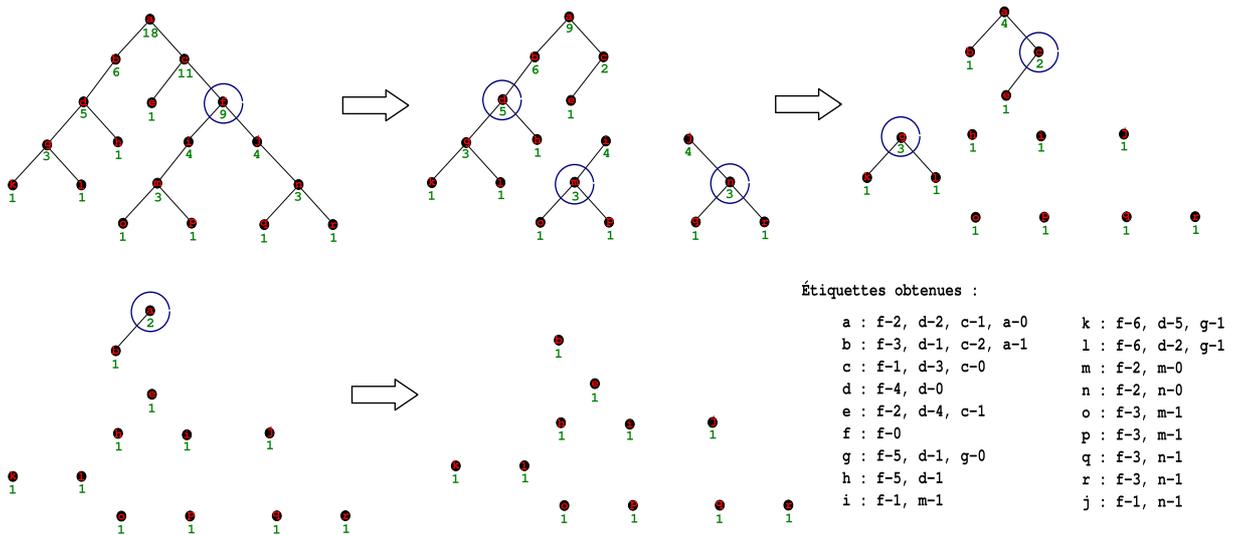


FIG. 3 – Étapes de l'étiquetage des distances dans un arbre

La distance exacte entre deux sommets de l'arbre se calcule alors très simplement, uniquement à partir de leurs étiquettes, de la façon suivante : il suffit de regarder quel est leur dernier séparateur commun puis de faire la somme de leurs distances à ce séparateur, ainsi dans l'exemple les résultats suivants sont notamment obtenus : $d(l, n) = d(l, f) + d(n, f) = 6 + 2 = 8$ ou encore $d(g, d) = d(g, d) + d(d, d) = 1 + 0 = 1$. La distance entre deux sommets est ainsi calculée de façon très rapide (en $O(\log n)$) et ce avec des étiquettes de relativement petite taille ($O(\log n \cdot \log h)$) où h est la hauteur de l'arbre) trouvées rapidement (en un temps $O(n^2)$).

3 Réseaux α -doublants

3.1 Réseaux α -doublants : définition et intérêts de l'étude

Nous avons donc décidé d'étudier le cas de la distance exacte dans les réseaux α -doublants ou de dimension doublante bornée. La *dimension doublante* d'un réseau est la plus petite valeur α telle que toute boule (fermée) de rayon $2r$ peut être couverte par 2^α boules (fermées) de rayon r , la boule de centre p et de rayon r étant définie ainsi : $B_p(r) = \{u \in V \mid d(u, p) \leq r\}$ où V est l'ensemble des sommets du graphe étudié et $d(u, p)$ la longueur du plus court chemin de u à p . Un graphe est dit de *dimension doublante bornée* ou α -*doublant* lorsque sa dimension doublante α est telle que $\alpha = O(1)$. Une définition plus générale de cette notion de dimension doublante est donnée dans l'article de Krauthgamer et Lee [6].

Une propriété intéressante des réseaux α -doublants, qui a motivé notre étude, est le fait que tout sous-graphe d'un graphe de dimension doublante bornée possède lui aussi cette propriété. Ainsi il est beaucoup plus simple de trouver un $r(n)$ -séparateur pour les graphes α -doublants que pour ceux ne possédant pas cette propriété.

Un autre intérêt de ce type de graphes est qu'ils semblent se rencontrer souvent dans des cas concrets, ainsi les graphes de type « petit monde » par exemple possèdent la propriété de dimension doublante bornée, avec, de plus, une valeur de α généralement petite. Les graphes de l'internet, du web ou encore ceux de réseaux pair à pair appartiennent à cette catégorie.

3.2 Un sous-problème : la croissance bornée

La classe des graphes α -doublants étant très vaste nous nous sommes d'abord intéressés à un sous-ensemble de ceux-ci : les graphes à *croissance bornée*. La notion de croissance bornée a été introduite par Karger et Ruhl [7].

Un graphe G est à croissance bornée si et seulement si $\forall p \in V, |B_p(r)| \leq 2^\rho |B_p(r/2)|$ où V est l'ensemble des sommets de G . On appellera ρ la KR-dimension.

Cependant la classe des graphes à croissance bornée pose un problème que ne posait pas celle des graphes à dimension doublante bornée : un sous graphe d'un graphe à croissance bornée ne possède pas nécessairement cette propriété. Il faudra donc tenir compte de ce problème dans la recherche de notre séparateur.

En fait, encore une fois, un séparateur extrêmement simple sera utilisé. Celui-ci se trouve de la façon suivante : il faut choisir un sommet u quelconque du graphe étudié puis faire croître une boule autour de ce sommet jusqu'à atteindre le plus petit rayon r tel qu'il y ait plus de $n/2$ sommets dans cette boule. Ainsi il est certain, une fois le cercle de rayon r ôté du graphe, que chacun des sous graphes obtenus est de taille inférieure ou égale à $n/2$: un séparateur a été trouvé. Cependant il ne s'agit probablement pas d'un $r(n)$ -séparateur tel que définit précédemment, c'est pourquoi il va falloir utiliser une méthode un peu différente de celle rencontrée de manière habituelle : les séparateurs vont tous être trouvés depuis le graphe d'origine au lieu de les chercher dans les sous graphes obtenus.

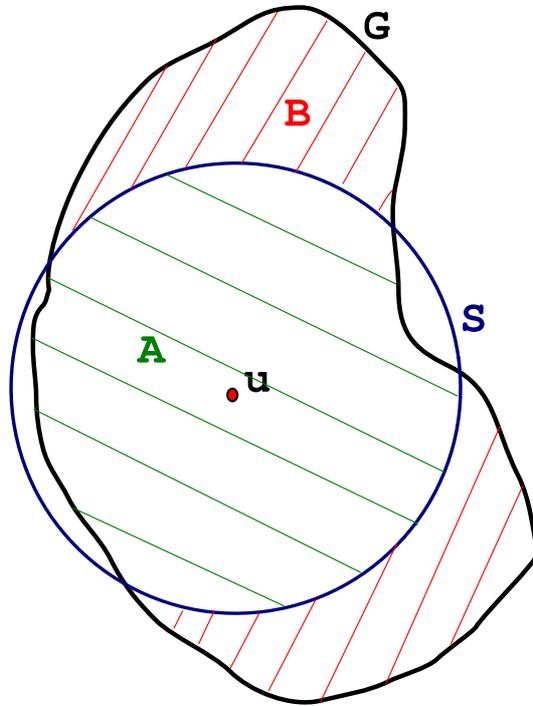


FIG. 4 – Séparateur dans les graphes à croissance bornée

Plus concrètement, notre premier séparateur étant représenté sur la figure 4, le sous graphe A sera séparé en deux en trouvant le rayon r_A de la plus petite boule contenant plus de $n/4$ sommets et en utilisant le cercle de rayon r_A comme séparateur. En trouvant de même r_B rayon de la plus petite boule contenant plus de $3n/4$ sommets le séparateur de la partie B du graphe sera obtenu (figure 5). En continuant de la même manière tous les séparateurs nécessaires seront trouvés.

La méthode de construction des étiquettes est ensuite exactement la

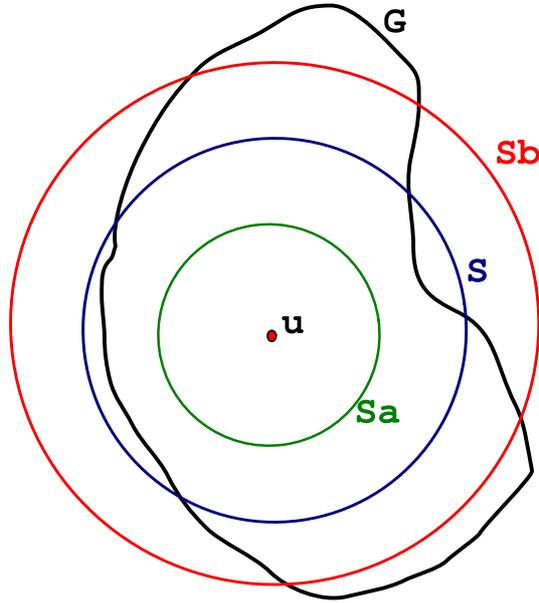


FIG. 5 – Séparateurs dans les graphes à croissance bornée

même que pour l'arbre : stocker les distances au séparateur dans l'étiquette de chaque sommet, avec la petite différence qu'il peut y avoir plusieurs sommets dans un séparateur. Dans ce cas il est nécessaire de stocker pour chaque sommet sa distance à chacun des éléments du séparateur. Le calcul de la distance à partir des étiquettes se fait alors en calculant un minimum de toutes les distances possibles.

Bien que le séparateur proposé semble convenable nous n'avons pas encore pu prouver que celui-ci était suffisamment petit pour être intéressant (c'est-à-dire contenant un nombre très inférieur à n sommets, du type $O(n^{1-1/\rho})$, qui est un résultat qui semble très probable).

En fait, prouver la validité et l'intérêt de notre méthode d'étiquetage des distances dans les graphes à croissance bornée revient à montrer que pour tout graphe G ayant cette propriété il existe un arbre binaire T dont les sommets forment une partitions de $V(G)$ (l'ensemble des sommets de G), de profondeur inférieure ou égale à $\log n$ tel que s'il existe un chemin de u à v dans G alors ce chemin passe par w , un élément de X_w le premier ancêtre commun à X_u (le sommet de T contenant u) et X_v (le sommet de T contenant v). Il faut de plus que $\forall X \in V(T), |X| \leq k$, où $k \ll n$, c'est cette dernière propriété que nous n'avons pas encore pu montrer.

Une fois ceci prouvé il sera possible de générer les étiquettes dans un graphe à croissance bornée en utilisant l'algorithme 2 puis de calculer les distances exactes à l'aide de l'algorithme 3 prenant en entrée les étiquettes

algorithme 2 générer étiquettes

choisir un sommet v dans G

procédure : construire-arbre (n, r)

si $n > 1$ **alors**

$S \leftarrow 0$

$R \leftarrow 0$

$E \leftarrow \{v\}$

tant que $S < n/2$ **faire**

marquer E

$E \leftarrow$ successeurs non marqués des éléments de E

$R \leftarrow R + 1$

si $R \geq r$ **alors**

$S \leftarrow S + |E|$

fin si

fin tant que

$r' \leftarrow R$

arbre \leftarrow {racine : E , fgauche : construire-arbre $(n/2, r)$, fdroit :
construire-arbre $(n/2, r')$ }

retourner arbre

sinon

retourner la partie restante du graphe

fin si

fin procédure

arbre \leftarrow construire-arbre $(n, 0)$

pour tout élément t de arbre **faire**

stocker dans l'étiquette de chaque élément de t sa distance à tout sommet
du graphe appartenant à un des ancêtres de t dans l'arbre et sa distance
aux autres éléments de t .

fin pour

$l(u)$ et $l(v)$ des sommets u et v entre lesquels la distance doit être calculée. Les étiquettes seraient donc de taille $O(K.\log^2 n)$ (où K est la taille du séparateur) pour un calcul de distance prenant un temps $O(K.\log n)$, par contre elles seraient générées en un temps $O(n^3)$ (dans le pire des cas dans l'algorithme 2 il faudrait calculer la distance de chaque sommet du graphe à chacun des autres, ce qui se fait en un temps $O(n^3)$ par un simple parcours en largeur).

algorithme 3 calculer distance

```

 $S_u \leftarrow$  premier séparateur retenu dans  $l(u)$ 
 $S_v \leftarrow$  premier séparateur retenu dans  $l(v)$ 
 $S \leftarrow S_u$ 
tant que  $S_u = S_v$  faire
     $S \leftarrow S_u$ 
     $S_u \leftarrow$  séparateur suivant retenu dans  $l(u)$ 
     $S_v \leftarrow$  séparateur suivant retenu dans  $l(v)$ 
fin tant que
 $d \leftarrow d_{max}$ 
pour tout  $s \in S$  faire
    si  $d \geq (d(u, s) + d(v, s))$  alors
         $d \leftarrow (d(u, s) + d(v, s))$ 
    fin si
fin pour
retourner  $d$ 

```

3.3 Retour aux réseaux α -doublants

Le temps passé sur les graphes à croissance bornée ne nous a pas permis d'étudier en détail le cas plus général des réseaux α -doublants. Cependant une façon de les découper semble se dégager de par leur structure, en voici le principe. Puisque la propriété de dimension doublante bornée nous permet d'affirmer que tout sous-ensemble d'un graphe α -doublant peut être couvert en utilisant au plus 2^α ensembles de sommets c'est vrai pour le graphe lui même (s'il est fini). Le graphe sera donc couvert par des ensembles particuliers : des boules. Il est connu qu'il est possible d'en avoir de l'ordre de 2^α (en couvrant la plus petite boule qui couvre le graphe entier par 2^α boules). Il serait ensuite possible de découper le graphe selon les bords de ces boules (figure 6). Le problème étant toujours le même que précédemment : savoir si ce séparateur est suffisamment petit pour être intéressant, c'est-à-dire s'il contient un nombre de sommets très inférieur à n .

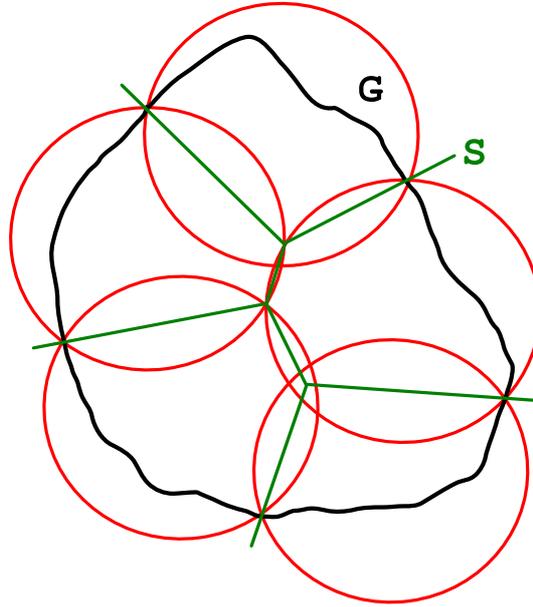


FIG. 6 – Schéma de séparateur dans les graphes α -doublants

Du fait de la propriété des réseaux α -doublants citée au début de cette partie tous les sous-graphes obtenus par le retrait de ce séparateur seraient eux aussi α -doublants et le séparateur obtenu serait donc forcément un $r(n)$ -séparateur tel que défini dans la partie II.

De manière concrète il n'est pas forcément facile de trouver un découpage du graphe en moins de 2^α sous-graphes. Cependant il est possible de trouver de façon très simple (avec un algorithme polynomial) un découpage en plusieurs parties dont la propriété de dimension doublante bornée prouve l'existence et ce à travers la notion de r -réseau [3]. Il est en fait relativement simple de construire pour tout graphe $G = (V, E)$ à n sommets un ensemble $C_r(G)$ d'ensembles de sommets vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall v \in V, \exists C \in C_r(G)$ tel que $B(v, r) \subseteq C$.
2. $\forall v \in V, |\{C \in C_r(G) | v \in C\}| \leq 4^\alpha$.
3. $\forall C \in C_r(G), \min\{b | \exists u \in C : C \subset B(u, b)\} \leq 2r$.

La propriété 1 signifie en fait que pour tout sommet de G la boule de centre ce sommet et de rayon r est contenue dans un des ensembles de $C_r(G)$. La propriété 2 assure que les sommets de G soient contenus dans « assez peu » d'éléments de $C_r(G)$. Enfin la propriété 3 affirme que les éléments de $C_r(G)$ ne sont pas « trop grands ».

La preuve de l'existence d'un tel découpage des graphes à dimension double bornée découle en fait d'un algorithme glouton très simple permettant de le construire comme étant $B(u, 2r) | u \in R$ où R est le résultat obtenu par l'algorithme 4 quand le graphe G étudié lui est donné en entrée.

algorithme 4 r -réseau

```
 $R \leftarrow \emptyset$   
tant que  $G \neq \emptyset$  faire  
  choisir un sommet  $u$   
   $G \leftarrow G \setminus B(u, r)$   
   $R \leftarrow R \cup \{u\}$   
fin tant que  
retourner  $R$ 
```

Conclusion

Nous avons donc proposé deux séparateurs, l'un pour le cas particulier de la croissance bornée et l'autre pour le cas plus général des réseaux α -doublants. Il reste finalement, dans les deux cas étudiés, à trouver la taille du séparateur, ceci afin de pouvoir évaluer précisément la taille des étiquettes créées. Si ces étiquettes s'avèrent de taille raisonnable - c'est-à-dire si le séparateur contient un nombre de sommets très inférieur à n (le nombre de sommets contenu dans le graphe étudié)- l'algorithme proposé pourra alors être validé. Il sera alors probablement possible de trouver un algorithme de routage dérivé de cet algorithme de calcul des distances, l'intérêt de ce schéma de routage étant qu'il donnerait un routage exact dans nos graphes (une méthode existe déjà pour donner un routage approximé [3]).

Cette méthode de routage pourrait peut-être même s'avérer efficace dans le cadre des réseaux pair à pair, qui sont α -doublants. En effet, ces réseaux présentent une organisation permettant a priori assez bien la mise en place de schémas de routage par étiquetage des sommets : chaque pair connaîtrait son étiquette. Le problème serait alors d'étudier comment faire la mise à jour des étiquettes lors de l'ajout ou du retrait d'un pair du réseau : peut-on faire cette mise à jour simplement et de manière locale ou, au contraire, risque-t-on de devoir modifier toutes les étiquettes de manière régulière ?

Remerciements :

Je tiens à remercier Cyril Gavoille pour son excellent accueil au LABRI et pour avoir bien voulu relire ce rapport.

Références

- [1] Cyril GAVOILLE, David PELEG. *Compact and localized distributed data structures*. Distributed computing 16, pages 111-120, Springer-Verlag, Mai 2003.
- [2] Cyril GAVOILLE, David PELEG, Stéphane PERENNES, Ran RAZ. *Distance labeling in graphs*. Journal of Algorithms 53, pages 85-112, 2004.
- [3] Ittai ABRAHAM, Cyril GAVOILLE, Andrew V. GOLDBERG, Dahlia MALKHI. *Routing in networks with low doubling dimension*. Rapport Technique MSR-TR-2005-175, Microsoft Research, Décembre 2005
- [4] P. WINKLER. *Proof of the squashed cube conjecture*. Combinatorica 3, pages 135-139, 1983.
- [5] John R. GILBERT, Joan P. HUTCHINSON, Robert Endre TARJAN. *A separation theorem for graphs of bounded genus*. Journal of Algorithms 5, pages 391-407, 1984.
- [6] Robert KRAUTHGAMER, James R. LEE. *Navigating nets : simple algorithms for proximity search*. 15^{ème} Symposium on Discrete Algorithms (SODA), pages 798-807, ACM-SIAM, Janvier 2004.
- [7] David R. KARGER, Matthias RUHL. *Finding nearest neighbors in growth restricted metrics* 34^{ème} Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pages 63-66, 2002.