Une variante des automates d'arbres
Sujet de réflexion pour la première partie de l'examen

On considère des ensembles de clauses définies de la forme :

$$P(t) \Leftarrow P_1(t_1), \ldots, P_n(t_n) \tag{1}$$

obéissant aux restrictions suivantes :

(i) t est une variable ou un terme *plat linéaire*, c'est-à-dire de la forme $f(x_1, \ldots, x_m)$, où f est un symbole de fonction et $x_1, \ldots, x_m$ des variables *distinctes*.

(ii) toutes les variables libres de t_i, $1 \leq i \leq n$, sont libres dans t.

Noter qu'il n'y a aucune restriction sur la profondeur ou la taille des termes $t_1, \ldots, t_n$.

On va considérer aussi des clauses *buts* de la forme :

$$\perp \Leftarrow P_1(t_1), \ldots, P_n(t_n) \tag{2}$$

sans aucune restriction sur les t_i.

La *profondeur* $d(t)$ d'un terme t est : $d(x) = 0$ pour toute variable x, et $d(f(t_1, \ldots, t_n)) = 1 + \max(d(t_1), \ldots, d(t_n), 0)$. La profondeur $d(A)$ d'un atome $A = P(t)$ est par définition la profondeur de t.

On considère d'autre part la règle de résolution ordonnée avec sélection, pour l'ordre $\succ$ défini comme dans le cours par $P(t) \succ Q(t')$ si et seulement si t' est un sous-terme strict de t, et la fonction de sélection telle que $\mathrm{sel}\ (A \Leftarrow B_1, \ldots, B_n)$ est l'ensemble de tous les littéraux négatifs $-B_i$ tels que $d(B_i) \geq d(A)$ et B_i est de profondeur $d(B_i)$ maximale. Autrement dit, on récupère d'abord tous les B_i tels que $d(B_i) \geq d(A)$; puis on ne garde que ceux de profondeur maximale parmi ces derniers.

1. Montrer que tout résolvant ordonné avec sélection de clauses de forme (1) ou (2) est encore d'une de ces deux formes.
2. Un *argument* d'une clause est un terme t tel que la clause contient un littéral de la forme $\pm P(t)$. Étant données deux clauses C_1 et C_2, on dira $C_1 \preceq C_2$ si et seulement s'il existe un renommage ρ tel que tout argument u_1 de $C_1\rho$ est un sous-terme d'un argument de C_2. Montrer que, si C'' est le résolvant ordonné avec sélection de deux clauses C et C' de forme (1) ou (2), et si C n'est pas splittable, alors $C'' \preceq C$ ou $C'' \preceq C'$.
3. En déduire que la satisfiabilité d'ensembles de clauses de forme (1) ou (2) est soluble en NEXPTIME (temps non-déterministe exponentiel).
4. Montrer que ce problème est DEXPTIME-difficile, en réduisant un autre problème DEXPTIME-complet (trouvé dans le cours, par ex.) à celui de la satisfiabilité des clauses de forme (1) ou (2).