Logique intuitionniste linéaire **LLI**

Correction.

I. Calcul des séquents, espaces de phases

La *logique intuitionniste linéaire propositionnelle sans exponentielles* **LLI** est définie comme suit. D'abord, les formules sont définies par la grammaire:

$$F := A|1|\bot|\top|F \otimes F|F \,\&\, F|F \oplus F|F \multimap F$$

où A parcourt un ensemble infini dénombrable de *variables propositionnelles*. Comparée à la syntaxe de MALL, la logique linéaire *classique* sans exponentielles, il manque 0 et le connecteur "par" ($\&$ écrit à l'envers), et $\multimap$ est devenu un connecteur logique primitif. En particulier, $F \multimap G$ n'est plus une abréviation de $F^\bot$ par G.

Les règles du système Gil de séquents pour **LLI** sont données en figure 1. Les contextes Γ, Δ, ..., sont des multi-ensembles de formules, et la virgule dénote l'union de multi-ensembles. On note Gil_{sc} le système sans la règle $[Cut]$ de coupure.

$$\frac{}{A \vdash A}\,[Ax] \qquad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta, F \vdash G}{\Gamma, \Delta \vdash G}\,[Cut]$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, 1 \vdash F}\,[1 \vdash] \qquad \frac{}{\vdash 1}\,[\vdash 1]$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash F}\,[\bot \vdash] \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\,[\vdash \top]$$

$$\frac{\Gamma, F, G \vdash H}{\Gamma, F \otimes G \vdash H}\,[\otimes \vdash] \qquad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta \vdash G}{\Gamma, \Delta \vdash F \otimes G}\,[\vdash \otimes]$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta, G \vdash H}{\Gamma, \Delta, F \multimap G \vdash H}\,[\multimap \vdash] \qquad \frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \multimap G}\,[\vdash \multimap]$$

$$\frac{\Gamma, F_i \vdash G}{\Gamma, F_1 \,\&\, F_2 \vdash G}\,[\&_i \vdash]\ (i = 1, 2) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \quad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \,\&\, F_2}\,[\vdash \&]$$

$$\frac{\Gamma, F_1 \vdash G \quad \Gamma, F_2 \vdash G}{\Gamma, F_1 \oplus F_2 \vdash G}\,[\oplus \vdash] \qquad \frac{\Gamma \vdash F_i}{\Gamma \vdash F_1 \oplus F_2}\,[\vdash \oplus_i]\ (i = 1, 2)$$

Figure 1: Le système Gil

1. Un *monoïde commutatif* est un triplet $(M, \bullet, \epsilon)$, où $\bullet$ est associatif, commutatif et a ϵ pour élément neutre. On étend $\bullet$ aux sous-ensembles X, Y, de M par $X \bullet Y = \{x \bullet y | x \in X, y \in Y\}$. Il est

facile de voir que $(\mathbb{P}(M), \bullet, \{\epsilon\}, \subseteq)$ est un monoïde commutatif *ordonné*, ce qui signifie que $\subseteq$ est un ordre *compatible* avec $\bullet$:

$$\text{si } X \subseteq X' \text{ et } Y \subseteq Y', \text{ alors } X \bullet Y \subseteq X' \bullet Y'$$

Montrer que le monoïde commutatif ordonné $(\mathbb{P}(M), \bullet, \{\epsilon\}, \subseteq)$ est *résidué*, c'est-à-dire qu'il existe une opération binaire $\multimap\!\!\bullet$, le *résidu*, telle que

$$X \bullet Y \subseteq Z \text{ ssi } X \subseteq Y \multimap\!\!\bullet Z$$

En prenant $X = Y \multimap\!\!\bullet Z$, on doit avoir $(Y \multimap\!\!\bullet Z) \bullet Y \subseteq Z$, autrement dit pour tout $x \in Y \multimap\!\!\bullet Z$, pour tout $y \in Y$, $x \bullet y \in Z$. Définissons donc

$$Y \multimap\!\!\bullet Z = \{x \in M | \forall y \in Y \cdot x \bullet y \in Z\}$$

Si $X \bullet Y \subset Z$, alors pour tous $x \in X, y \in Y$, $x \bullet y \in Z$. Donc tout $x \in X$ est dans $Y \multimap\!\!\bullet Z$. Donc $X \subseteq Y \multimap\!\!\bullet Z$. Réciproquement si $X \subseteq Y \multimap\!\!\bullet Z$, pour tous $x \in X, y \in Y$, $x \bullet y \in Z$, soit $X \bullet Y \subseteq Z$.

2. Une *clôture* sur M est une fonction $X \in \mathbb{P}(M) \mapsto X^* \in \mathbb{P}(M)$ qui est monotone ($X \subseteq Y$ implique $X^* \subseteq Y^*$), et vérifie:

$$(T)\ X \subseteq X^* \qquad (4)\ X^{**} \subseteq X^*$$

(Par exemple, si M est un espace topologique, alors X^* défini comme étant l'adhérence de X est une clôture. Les esprits fins auront remarqué une parenté avec la logique modale S4.)

Une clôture est *stable* si et seulement si $X^* \bullet Y^* \subseteq (X \bullet Y)^*$ pour tous $X, Y \subseteq M$.

Si $(_)^*$ est une clôture stable, on appellera $(M, \bullet, \epsilon, (_)^*)$ un *espace de phases*.

Étant donné un environnement ρ qui à chaque variable propositionnelle A associe un élément de M, on définit la sémantique $[\![F]\!]\,\rho$ de la formule F comme en figure 2.

$$\begin{array}{rclcrcl}
[\![A]\!]\,\rho & = & \{\rho(A)\}^* & & [\![F \multimap G]\!]\,\rho & = & [\![F]\!]\,\rho \multimap\!\!\bullet [\![G]\!]\,\rho \\
[\![1]\!]\,\rho & = & \{\epsilon\}^* & & [\![F \otimes G]\!]\,\rho & = & ([\![F]\!]\,\rho \bullet [\![G]\!]\,\rho)^* \\
[\![\bot]\!]\,\rho & = & \emptyset^* & & [\![F \oplus G]\!]\,\rho & = & ([\![F]\!]\,\rho \cup [\![G]\!]\,\rho)^* \\
[\![\top]\!]\,\rho & = & M & & [\![F \,\&\, G]\!]\,\rho & = & [\![F]\!]\,\rho \cap [\![G]\!]\,\rho
\end{array}$$

Figure 2: La sémantique des espaces de phases

3. Montrer que $[\![F]\!]\,\rho$ est un ensemble *clos*. Un ensemble $X \subseteq M$ est *clos* si et seulement s'il existe Y tel que $X = Y^*$ (ou de façon équivalente, si $X = X^*$; les deux conditions sont équivalents parce que $Y^{**} = Y^*$). On pourra donc considérer que les ensembles clos sont les valeurs de vérité de **LLI**. On notera $\mathbb{B}(M)$ l'ensemble des parties closes de M.

Par récurrence sur F. C'est évident, par (4), pour tous les cas sauf possiblement $\top$, $\multimap$ et $\&$. Pour $\top$, $M^* \subseteq M$ car M contient tous les sous-ensembles possibles; mais par (T), $M = M^*$.

Pour $\&$, on doit montrer que l'intersection de deux ensembles clos est clos. Or si X et Y sont clos, $(X \cap Y)^* \subseteq X^*$ (par monotonie) $= X$ (car X est clos); de même $(X \cap Y)^* \subseteq Y$, donc $(X \cap Y)^* \subseteq X \cap Y$. Par (T), $X \cap Y \subseteq (X \cap Y)^*$, donc $(X \cap Y)^* = X \cap Y$.

Pour $\multimap$, on doit montrer que si X et Y sont clos, alors $X \multimap\!\!\bullet Y$ l'est aussi. Comme $X \multimap\!\!\bullet Y \subseteq (X \multimap\!\!\bullet Y)^*$ par (T), il reste à démontrer que $(X \multimap\!\!\bullet Y)^* \subseteq X \multimap\!\!\bullet Y$, ce qui est équivalent par définition à $(X \multimap\!\!\bullet Y)^* \bullet X \subseteq Y$. Or $(X \multimap\!\!\bullet Y) \bullet X \subseteq Y$ par définition de $\multimap\!\!\bullet$, donc $((X \multimap\!\!\bullet Y) \bullet X)^* \subseteq Y^*$ par monotonie, donc $(X \multimap\!\!\bullet Y)^* \bullet X^* \subseteq Y^*$ puisque la clôture est stable. Comme X et Y sont clos, on a bien $(X \multimap\!\!\bullet Y)^* \bullet X \subseteq Y$.

4. On pose $X \star Y = (X \bullet Y)^*$. Montrer que $(\mathbb{B}(M), \star, \{\epsilon\}^*, \subseteq)$ est encore un monoïde commutatif ordonné, résidué par $\multimap\!\!\bullet$.

   La commutativité est évidente. Pour l'associativité, soient X, Y, Z clos. Alors $(X \star Y) \star Z = ((X \bullet Y)^* \bullet Z)^* = ((X \bullet Y)^* \bullet Z^*)^*$ (puisque Z est clos) $\subseteq ((X \bullet Y) \bullet Z)^{**}$ (par stabilité) $= ((X \bullet Y) \bullet Z)^*$ (par (4)) $= (X \bullet (Y \bullet Z))^*$ (par associativité de $\bullet$) $\subseteq (X \bullet (Y \bullet Z)^*)^*$ (par (T)) $= X \star (Y \star Z)$. L'inclusion réciproque se démontre de façon similaire, en utilisant que X est clos.

   Pour montrer que $\{\epsilon\}^*$ est neutre à gauche, calculons $\{\epsilon\}^* \star X$ lorsque X est clos. Ceci égale $(\{\epsilon\}^* \bullet X)^* = (\{\epsilon\}^* \bullet X^*)^*$ (puisque X est clos) $\subseteq (\{\epsilon\} \bullet X)^{**}$ (par stabilité) $= (\{\epsilon\} \bullet X)^*$ (par (4)) $= X^* = X$ (puisque X est clos). Réciproquement, $X = \{\epsilon\} \bullet X \subseteq \{\epsilon\}^* \bullet X$ (par (T)) $\subseteq (\{\epsilon\}^* \bullet X)^*$ (par (T) encore) $= \{\epsilon\}^* \star X$. La démonstration que $\{\epsilon\}^*$ est neutre à droite est similaire.

   Montrons que $\star$ est compatible avec $\subseteq$. Or si $X \subseteq X'$ et $Y \subseteq Y'$, $X \bullet Y \subseteq X' \subseteq Y'$, d'où la conclusion par monotonie de $Z \mapsto Z^*$.

   Il ne reste plus qu'à démontrer que pour tous X, Y, Z clos, $X \star Y \subseteq Z$ ssi $X \subseteq Y \multimap\!\!\bullet Z$. Ceci revient à dire que $X \star Y \subseteq Z$ est équivalent à $X \bullet Y \subseteq Z$. Or si $X \star Y \subseteq Z$, alors $X \bullet Y \subseteq X \star Y \subseteq Z$ par (T), et réciproquement si $X \bullet Y \subseteq Z$ alors $X \star Y = (X \bullet Y)^* \subseteq Z^*$ (par monotonie) $= Z$ (puisque Z est clos).

5. Montrer que $\emptyset^*$ est un élément absorbant pour $\star$: pour tout X clos, $X \star \emptyset^* = \emptyset^*$; que $\emptyset^*$ est le plus petit ensemble clos; que M est le plus grand; que $X \cap Y$ est la borne inférieure de $X, Y \in \mathbb{B}(M)$ et $(X \cup Y)^*$ est leur borne supérieure. (Donc $(\mathbb{B}(M), \subseteq, \emptyset^*, M, \cap, (_ \cup _)^*)$ est un *treillis* dont le minimum $\emptyset^*$ est absorbant pour $\star$.)

   Si X est clos, $X \star \emptyset^* = (X \bullet \emptyset^*)^* = (X^* \bullet \emptyset^*)^* \subseteq (X \bullet \emptyset)^*$ (par stabilité et (4)) $= \emptyset^*$. La réciproque est parce que $\emptyset^*$ est le plus petit ensemble clos: en effet, si X est clos, $\emptyset \subseteq X$ implique $\emptyset^* \subseteq X^* = X$.

   Il est évident que M est le plus grand ensemble clos. Pour vérifier que $X \cap Y$ est l'inf de X et Y, il suffit de vérifier qu'il est clos: or nous l'avons déjà montré à la question 3. Pour vérifier que $(X \cup Y)^*$ est le sup, il faut vérifier qu'il est clos (c'est par construction), et que pour tout Z clos contentant à la fois X et Y, Z contient $(X \cup Y)^*$. En effet, Z contient $X \cup Y$, donc Z^* contient $(X \cup Y)^*$, mais $Z = Z^*$ puisque Z est clos.

6. Déduire des questions précédentes que la sémantique de la figure 2 est *correcte* par rapport à Gil, au sens où pour tout séquent $\Gamma \vdash F$ dérivable dans Gil, on a $[\![\Gamma]\!]\,\rho \subseteq [\![F]\!]\,\rho$. On pose ici $[\![\Gamma]\!]\,\rho = [\![F_1]\!]\,\rho \star \ldots \star [\![F_n]\!]\,\rho$ si $\Gamma = F_1, \ldots, F_n$; si $n = 0$, ceci dénote $\{\epsilon\}^*$.

   Par récurrence structurelle sur la dérivation donnée. Il y a autant de cas à considérer que de règles, soit 14 (!). Les cas $[Ax]$, $[\vdash 1]$, $[\vdash \top]$, $[\otimes \vdash]$ sont évidents. Le cas $[\vdash \otimes]$ est par la monotonie de $\star$.

   $[Cut]$: si $[\![\Gamma]\!]\,\rho \subseteq [\![F]\!]\,\rho$ et $[\![\Delta]\!]\,\rho \star [\![F]\!]\,\rho \subseteq [\![G]\!]\,\rho$, alors $[\![\Gamma]\!]\,\rho \star [\![\Delta]\!]\,\rho \subseteq [\![F]\!]\,\rho \star [\![\Delta]\!]\,\rho$ (par monotonie de $\star$) $\subseteq [\![G]\!]\,\rho$.

   $[1 \vdash]$: car $\{\epsilon\}^*$ est neutre pour $\star$.

   $[\bot \vdash]$: comment $\emptyset^*$ est absorbant, $[\![\Gamma]\!]\,\rho \star \emptyset^* = \emptyset^*$. La correction de la règle se déduit maintenant du fait que $\emptyset^*$ est le plus petit ensemble clos.

   $[\multimap \vdash]$: supposons $[\![\Gamma]\!]\,\rho \subseteq [\![F]\!]\,\rho$ et $[\![\Delta]\!]\,\rho \star [\![G]\!]\,\rho \subseteq [\![H]\!]\,\rho$. Alors $[\![\Gamma]\!]\,\rho \star [\![\Delta]\!]\,\rho \star [\![F \multimap G]\!]\,\rho \subseteq [\![\Delta]\!]\,\rho \star ([\![F]\!]\,\rho \multimap\!\!\bullet [\![G]\!]\,\rho) \star [\![F]\!]\,\rho \subseteq [\![\Delta]\!]\,\rho \star [\![G]\!]\,\rho$ (par résiduation avec $X = [\![F]\!]\,\rho \multimap\!\!\bullet [\![G]\!]\,\rho$, $Y = [\![F]\!]\,\rho$, $Z = [\![G]\!]\,\rho$) $\subseteq [\![H]\!]\,\rho$.

   $[\vdash \multimap]$: vient directement de la propriété de résiduation de $\multimap\!\!\bullet$ dans $\mathbb{B}(M)$.

   $[\&_i \vdash]$: car $[\![F_1]\!]\,\rho \cap [\![F_n]\!]\,\rho \subseteq [\![F_i]\!]\,\rho$ et $\star$ est monotone.

   $[\vdash \&]$: si $[\![\Gamma]\!]\,\rho$ est inclus dans $[\![F_1]\!]\,\rho$ et dans $[\![F_2]\!]\,\rho$, alors il est inclus dans leur intersection. Observer que les deux dernières règles expriment exactement que $\cap$ est l'inf dans $\mathbb{B}(M)$.

$[\oplus \vdash]$: si $[\![\Gamma, F_1]\!]\rho \subseteq [\![G]\!]\rho$ et $[\![\Gamma, F_2]\!]\rho \subseteq [\![G]\!]\rho$, alors $[\![\Gamma, F_1 \oplus F_2]\!]\rho = [\![\Gamma]\!]\rho \star ([\![F_1]\!]\rho \cup [\![F_2]\!]\rho)^* = \left(([\![\Gamma]\!]\rho)^* \bullet ([\![F_1]\!]\rho \cup [\![F_2]\!]\rho)^*\right)^*$ (parce que $[\![\Gamma]\!]\rho$ est clos par construction) $\subseteq ([\![\Gamma]\!]\rho \bullet ([\![F_1]\!]\rho \cup [\![F_2]\!]\rho))^*$ *(par stabilité, monotonie et (4))* $= (([\![\Gamma]\!]\rho \bullet [\![F_1]\!]\rho) \cup ([\![\Gamma]\!]\rho \bullet [\![F_2]\!]\rho))^* \subseteq (([\![\Gamma]\!]\rho \star [\![F_1]\!]\rho) \cup ([\![\Gamma]\!]\rho \star [\![F_2]\!]\rho))^*$ *(par (T))* $\subseteq ([\![G]\!]\rho \cup [\![G]\!]\rho)^*$ *(par hypothèse)* $= ([\![G]\!]\rho)^* = [\![G]\!]\rho$ *parce que $[\![G]\!]\rho$ est clos.*

$[\vdash \oplus]$: si $[\![\Gamma]\!]\rho \subseteq [\![F_i]\!]\rho$ alors en particulier $[\![\Gamma]\!]\rho \subseteq [\![F_1 \oplus F_2]\!]\rho$ car $[\![F_i]\!]\rho \subseteq ([\![F_1]\!]\rho \cup [\![F_2]\!]\rho)^*$ car $X, Y \mapsto (X \cup Y)^*$ est le sup.

II. Complétude

On va montrer la complétude de la sémantique des espaces de phases pour Gil.

Soit FORM l'ensemble de toutes les formules de **LLI**, et CTX l'ensemble de tous les contextes Γ de **LLI**. Clairement, CTX est un monoïde M dont l'élément neutre ϵ est le contexte vide et la loi $\bullet$ est l'union (multi-ensembles) des contextes. On définit un opérateur $(_)^*$ pour tout ensemble X de contextes par:

$$X^* = \{\Gamma \in \text{CTX} | \forall \Delta \in \text{CTX} \cdot \forall F \in \text{FORM} \cdot (\forall \Theta \in X \cdot \Theta, \Delta \vdash_{sc} F) \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash_{sc} F\}$$

où $\vdash_{sc}$ est la relation de déduction dans le système sans coupures Gil_{sc}.

1. Montrer que $X \mapsto X^*$ définit une clôture stable sur $(\text{CTX}, \bullet, \epsilon)$. (Indication: ceci n'utilise aucune propriété de $\vdash_{sc}$, et est totalement algébrique. Si vous vous perdez dans les hypothèses, essayez d'utiliser un assistant de preuves comme Coq par exemple pour garder trace des hypothèses que vous pouvez utiliser à chaque instant.)

   Montrons d'abord que $X \mapsto X^*$ est une clôture.

   Si $X \subseteq Y$, alors pour tout $\Gamma \in X^*$, on affirme que $\Gamma \in Y^*$. En effet, pour tout contexte Δ, toute formule F tels que $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$ pour tout $\Theta \in Y$, en particulier $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$ pour tout $\Theta \in X$, donc comme $\Gamma \in X^*$, $\Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$.

   (T): si $\Gamma \in X$, alors pour tous Δ, F tels que pour tout Θ dans X on ait $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$, en particulier pour $\Theta = \Gamma$, on a $\Gamma, \Delta \vdash F$. Donc $\Gamma \in X^*$. Comme Γ est arbitraire, $X \subseteq X^*$.

   (4): supposons $\Gamma \in X^{**}$. Pour montrer que $\Gamma \in X^*$, posons Δ, F arbitraires tels que: (a) pour tout $\Theta \in X$, $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$, et montrons que $\Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$. Comme $\Gamma \in X^{**}$, ceci est une conséquence de l'affirmation: pour tout $\Theta' \in X^*$, $\Theta', \Delta \vdash_{sc} F$—qu'il nous reste à montrer. Soit donc Θ' quelconque dans X^*, et montrons $\Theta', \Delta \vdash_{sc} F$. Comme Θ' est dans X^*:

   $$\textit{pour tous } \Delta', F' \textit{ tels que pour tout } \Theta \in X, \Theta, \Delta' \vdash_{sc} F', \textit{ on a } \Theta', \Delta' \vdash_{sc} F'.$$

   En particulier pour $\Delta' = \Delta$, $F' = F$ on a bien pour tout $\Theta \in X$, $\Theta, \Delta \vdash F$: c'est l'hypothèse (a). Donc $\Theta', \Delta \vdash_{sc} F$, ce que l'on souhaitait démontrer.

   Il ne reste plus qu'à démontrer la stabilité. Tout élément de $X^* \bullet Y^*$ est de la forme Γ, Γ', où $\Gamma \in X^*$, c'est-à-dire:

   $$\textit{(b)}\ \forall \Delta \in \text{CTX} \cdot \forall F \in \text{FORM} \cdot (\forall \Theta \in X \cdot \Theta, \Delta \vdash_{sc} F) \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$$

   et $\Gamma' \in Y$, c'est-à-dire:

   $$\textit{(c)}\ \forall \Delta' \in \text{CTX} \cdot \forall F' \in \text{FORM} \cdot (\forall \Theta' \in X \cdot \Theta', \Delta' \vdash_{sc} F') \Rightarrow \Gamma', \Delta' \vdash_{sc} F'$$

   On cherche à montrer que (Γ, Γ') est dans $(X \bullet Y)^*$, autrement dit que pour tous Δ'', F'' tels que

   $$\textit{(d) pour tous } \Theta \in X, \Theta' \in Y, \Theta, \Theta', \Delta'' \vdash_{sc} F'',$$

   on a $\Gamma, \Gamma', \Delta'' \vdash_{sc} F''$. Or si (d) est vrai, en utilisant (b) avec $\Delta = \Theta', \Delta''$ et $F = F''$ on déduit que pour tout $\Theta' \in Y$, $\Gamma, \Theta', \Delta'' \vdash_{sc} F''$. Maintenant en utilisant (c) avec $\Delta' = \Gamma, \Delta''$ et $F' = F''$ on déduit que $\Gamma, \Gamma', \Delta'' \vdash_{sc} F''$, ce que l'on souhaitait prouver.

2. À toute formule F on peut associer deux ensembles de contextes, un ensemble minimal $\underline{F} = \{F\}$ qui ne contient que le seul contexte réduit à la formule F, et un ensemble maximal $\overline{F} = \{\Gamma \in \text{CTX} | \Gamma \vdash_{sc} F\}$, de tous les contextes dont on peut déduire F sans coupure.

   On considère la valuation ρ qui à toute variable propositionnelle A associe la formule A elle-même. Montrer alors que

$$\underline{F} \subseteq [\![F]\!]\,\rho \subseteq \overline{F}$$

   pour toute formule F de **LLI**. On rappelle que par les résultats de la partie I, $[\![F]\!]\,\rho$ est toujours un ensemble clos de contextes. (Note: cette question est relativement longue. Elle se fait entièrement sémantiquement: la syntaxe n'intervient que pour appliquer des règles de déduction, jamais pour analyser les formes possibles de déductions dans Gil_{sc}.)

   Par récurrence structurelle sur F.

   Si F est une variable propositionnelle A, $[\![A]\!]\,\rho = \{A\}^*$. Or $\underline{A} = \{A\} \subseteq \{A\}^*$ par (T). D'autre part, on doit montrer que $\{A\}^* \subseteq \overline{A}$. Soit $\Gamma \in \{A\}^*$ quelconque, c'est-à-dire que pour tous Δ, F tels que $A, \Delta \vdash_{sc} F$ alors $\Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$. En particulier pour $\Delta = \epsilon$ et $F = A$, on a $A \vdash_{sc} A$ par $[Ax]$, donc $\Gamma \vdash_{sc} A$, c'est-à-dire $\Gamma \in \overline{A}$.

   Si $F = 1$, $[\![1]\!]\,\rho = \{\epsilon\}^*$. L'inclusion gauche à démontrer est $1 \in \{\epsilon\}^*$, autrement dit: pour tous Δ, F tels que $\Delta \vdash_{sc} F$ alors $1, \Delta \vdash_{sc} F$: c'est exactement la règle $[1 \vdash]$. L'inclusion droite est $\{\epsilon\}^* \subseteq \overline{\epsilon}$. Supposons $\Gamma \in \{\epsilon\}^*$, c'est-à-dire que pour tous Δ, F tels que $\Delta \vdash_{sc} F$ on ait $\Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$. On souhaite montrer que $\Gamma \vdash_{sc} 1$: il suffit de prendre $\Delta = \epsilon$, $F = 1$, alors $\Delta \vdash_{sc} F$ est par la règle $[\vdash 1]$.

   Si $F = \bot$, $[\![\bot]\!]\,\rho = \emptyset^*$. L'inclusion gauche $\bot \in \emptyset^*$ signifie: pour tous Δ, F on a $\bot, \Delta \vdash_{sc} F$: c'est la règle $[\bot \vdash]$. L'inclusion droite est $\emptyset^* \subseteq \overline{\bot}$. Supposons $\Gamma \in \emptyset^*$, autrement dit pour tous Δ, F, on a $\Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$. En particulier pour $\Delta = \epsilon$, $F = \bot$ on a $\Gamma \vdash_{sc} \bot$, donc $\Gamma \in \overline{\bot}$.

   Si $F = \top$, $[\![\top]\!]\,\rho = M = \text{CTX}$. L'inclusion gauche $F \in M$ est donc triviale, et l'inclusion droite est $\text{CTX} \subseteq \overline{\top}$, autrement dit $\Gamma \vdash \top$ pour tout contexte Γ: c'est la règle $[\vdash \top]$.

   Si F est de la forme $F_1 \otimes F_2$, $[\![F_1 \otimes F_2]\!]\,\rho = [\![F_1]\!]\,\rho \star [\![F_2]\!]\,\rho = ([\![F_1]\!]\,\rho \bullet [\![F_2]\!]\,\rho)^*$.

   - *L'inclusion gauche est $F_1 \otimes F_2 \in ([\![F_1]\!]\,\rho \bullet [\![F_2]\!]\,\rho)^*$, autrement dit pour tous Δ, F tels que pour tous $\Theta_1 \in [\![F_1]\!]\,\rho$, $\Theta_2 \in [\![F_2]\!]\,\rho$, $\Theta_1, \Theta_2, \Delta \vdash_{sc} F$, alors $F_1 \otimes F_2, \Delta \vdash_{sc} F$. Posons Δ, F tels que pour tous $\Theta_1 \in [\![F_1]\!]\,\rho$, $\Theta_2 \in [\![F_2]\!]\,\rho$, $\Theta_1, \Theta_2, \Delta \vdash_{sc} F$. Par hypothèse de récurrence $\Theta_1 = F_1 \in [\![F_1]\!]\,\rho$ et $\Theta_2 = F_2 \in [\![F_2]\!]\,\rho$, donc $F_1, F_2, \Delta \vdash_{sc} F$; on en déduit $F_1 \otimes F_2, \Delta \vdash_{sc} F$ par la règle $[\otimes \vdash]$.*
   - *L'inclusion droite est $([\![F_1]\!]\,\rho \bullet [\![F_2]\!]\,\rho)^* \subseteq \overline{F_1 \otimes F_2}$. Soit donc $\Gamma \in ([\![F_1]\!]\,\rho \bullet [\![F_2]\!]\,\rho)^*$ quelconque. En particulier, pour tous Δ, F tels que pour tous $\Theta_1 \in [\![F_1]\!]\,\rho$, $\Theta_2 \in [\![F_2]\!]\,\rho$, $\Theta_1, \Theta_2, \Delta \vdash_{sc} F$, on a $\Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$. Prenons $\Delta = \emptyset$, $F = F_1 \otimes F_2$: pour tous $\Theta_i \in [\![F_i]\!]\,\rho$, par hypothèse de récurrence $\Theta_i \vdash F_i$ (inclusion droite), donc $\Theta_1, \Theta_2 \vdash_{sc} F_1 \otimes F_2$ par $[\vdash \otimes]$, c'est-à-dire $\Theta_1, \Theta_2, \Delta \vdash_{sc} F$. On en déduit $\Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$, c'est-à-dire $\Gamma \vdash F_1 \otimes F_2$, ce que l'on souhaitait démontrer.*

   Si F est de la forme $F_1 \,\&\, F_2$, $[\![F_1 \,\&\, F_2]\!]\,\rho = [\![F_1]\!]\,\rho \cap [\![F_2]\!]\,\rho$.

   - *L'inclusion gauche est $F_1 \,\&\, F_2 \in [\![F_1]\!]\,\rho \cap [\![F_2]\!]\,\rho$. Or par hypothèse de récurrence $F_1 \in [\![F_1]\!]\,\rho$ et $F_2 \in [\![F_2]\!]\,\rho$. Montrons que $F_1 \,\&\, F_2$ est dans $[\![F_1]\!]\,\rho$ (le cas $[\![F_2]\!]\,\rho$ est symétrique, et on en conclura $F_1 \,\&\, F_2 \in [\![F_1]\!]\,\rho \cap [\![F_2]\!]\,\rho$). Pour ceci on utilise le fait que $[\![F_1]\!]\,\rho$ est clos, ce qui implique $F_1 \in ([\![F_1]\!]\,\rho)^*$, c'est-à-dire que: (a) pour tous Δ, F tels que pour tous $\Theta \in [\![F_1]\!]\,\rho$, $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$, alors $F_1, \Delta \vdash_{sc} F$. On veut démontrer que $F_1 \,\&\, F_2$ est dans $[\![F_1]\!]\,\rho = ([\![F_1]\!]\,\rho)^*$, soit que pour tous Δ, F tels que pour tous $\Theta \in [\![F]\!]_1\,\rho$, $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$, alors $F_1 \,\&\, F_2, \Delta \vdash_{sc} F$. Mais tous ces Δ, F sont tels que $F_1, \Delta \vdash_{sc} F$ par (a), donc $F_1 \,\&\, F_2, \Delta \vdash_{sc} F$ par $[\&_1 \vdash]$. (Le cas de F_2 utiliserait $[\&_1 \vdash]$.)*
   - *Pour l'inclusion droite, soit $\Gamma \in [\![F_1]\!]\,\rho \cap [\![F_2]\!]\,\rho$. Par hypothèse de récurrence (inclusion droite) on a $\Gamma \vdash_{sc} F_1$ et $\Gamma \vdash_{sc} F_2$, donc $\Gamma \vdash_{sc} F_1 \,\&\, F_2$ par $[\vdash \&]$.*

   Si F est de la forme $F_1 \oplus F_2$, $[\![F_1 \oplus F_2]\!]\,\rho = ([\![F_1]\!]\,\rho \cup [\![F_2]\!]\,\rho)^*$.

- *L'inclusion gauche est $F_1 \oplus F_2 \in (\llbracket F_1 \rrbracket \rho \cup \llbracket F_2 \rrbracket \rho)^*$. Soient Δ, F quelconques tels que pour tout $\Theta \in \llbracket F_1 \rrbracket \rho \cup \llbracket F_2 \rrbracket \rho$, $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$, on souhaite montrer que $F_1 \oplus F_2, \Delta \vdash_{sc} F$. Or ces Δ et F sont tels que pour tout $\Theta in \llbracket F_1 \rrbracket \rho$, $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$, donc $F_1, \Delta \vdash_{sc} F$ puisque par hypothèse de récurrence (inclusion gauche) et le fait que $\llbracket F_1 \rrbracket \rho$ est clos, $F_1 \in (\llbracket F_1 \rrbracket \rho)^*$. De même, $F_1, \Delta \vdash_{sc} F$, donc $F_1 \oplus F_2, \Delta \vdash_{sc} F$ par la règle $[\oplus \vdash]$, comme souhaité.*
- *Pour l'inclusion droite, soit $\Gamma \in (\llbracket F_1 \rrbracket \rho \cup \llbracket F_2 \rrbracket \rho)^*$ quelconque, c'est-à-dire que pour tous Δ, F tels que pour tout $\Theta \in \llbracket F_1 \rrbracket \rho \cup \llbracket F_2 \rrbracket \rho$, $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$, alors $\Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$. Posons $\Delta = \emptyset$, $F = F_1 \oplus F_2$: pour tout $\Theta \in \llbracket F_1 \rrbracket \rho \cup \llbracket F_2 \rrbracket \rho$, $\Theta \vdash_{sc} F_1 \oplus F_2$, puisque si $\Theta \in \llbracket F_i \rrbracket \rho$, alors $\Theta \vdash_{sc} F_i$ par hypothèse de récurrence (inclusion droite), donc $\Theta \vdash_{sc} F_1 \oplus F_2$ par $[\vdash \oplus_i]$. Donc $\Gamma \vdash F_1 \oplus F_2$, soit $F_1 \oplus F_2 \in \overline{\Gamma}$, ce qu'on souhaitait montrer.*

Finalement, si F est de la forme $F_1 \multimap F_2$, $\llbracket F_1 \multimap F_2 \rrbracket \rho = \llbracket F_1 \rrbracket \rho \multimap\!\bullet \llbracket F_2 \rrbracket \rho$.

- *L'inclusion gauche est $\{F_1 \multimap F_2\} \subseteq \llbracket F_1 \rrbracket \rho \multimap\!\bullet \llbracket F_2 \rrbracket \rho$, ce qui revient à dire $\{F_1 \multimap F_2\} \bullet \llbracket F_1 \rrbracket \rho \subseteq \llbracket F_2 \rrbracket \rho$ par la propriété de résiduation. Considérons un contexte quelconque dans $\{F_1 \multimap F_2\} \bullet \llbracket F_1 \rrbracket \rho$, il est donc de la forme $F_1 \multimap F_2, \Gamma$ avec $\Gamma \in \llbracket F_1 \rrbracket \rho$, donc $\Gamma \vdash_{sc} F_1$ par hypothèse de récurrence (inclusion droite). Comme $\llbracket F_2 \rrbracket \rho$ est clos, on va montrer que $F_1 \multimap F_2, \Gamma$ est dans $(\llbracket F_2 \rrbracket \rho)^*$. Posons Δ, F quelconques tels que pour tout $\Theta \in \llbracket F_2 \rrbracket \rho$, $\Theta, \Delta \vdash_{sc} F$, et montrons que $F_1 \multimap F_2, \Gamma, \Delta \vdash_{sc} F$. Prenons $\Theta = F_2$: par hypothèse de récurrence (inclusion gauche) $F_2 \in \llbracket F_2 \rrbracket \rho$, donc $F_2, \Delta \vdash_{sc} F$. Avec le fait que $\Gamma \vdash_{sc} F_1$, on peut en déduire par $[\multimap \vdash]$ le séquent $\Gamma, \Delta, F_1 \multimap F_2 \vdash F$, ce qui est ce que l'on souhaite démontrer.*
- *Pour l'inclusion droite, soit $\Gamma \in \llbracket F_1 \rrbracket \rho \multimap\!\bullet \llbracket F_2 \rrbracket \rho$ quelconque. Par résiduation ceci signifie que pour tout $\Delta \in \llbracket F_1 \rrbracket \rho$, (Γ, Δ) est dans $\llbracket F_2 \rrbracket \rho$. En particulier on peut prendre $\Delta = F_1$ par hypothèse de récurrence (inclusion gauche), donc $\Gamma, F_1 \in \llbracket F_2 \rrbracket \rho$. Par hypothèse de récurrence (inclusion droite), $\Gamma, F_1 \vdash_{sc} F_2$. Donc $\Gamma \vdash F_1 \multimap F_2$ par la règle $[\vdash \multimap]$.*

3. En déduire que tout séquent valide dans la sémantique des espaces de phases est prouvable (complétude), et ce *sans coupure* (élimination des coupures). On dit que $\Gamma \vdash F$ est *valide* ssi $\llbracket \Gamma \rrbracket \rho \subseteq \llbracket F \rrbracket \rho$ dans tout espace de phases et pour toute valuation ρ.

   Si $\Gamma \vdash F$ est valide, en particulier $\llbracket \Gamma \rrbracket \rho \subseteq \llbracket F \rrbracket \rho$. Donc par la question précédente (inclusion droite), $\llbracket \Gamma \rrbracket \rho \subseteq \overline{F}$. Posons $\Gamma = F_1, \ldots, F_n$. Par la question précédente (inclusion gauche), $F_1 \in \llbracket F_1 \rrbracket \rho$ et ... et $F_n \in \llbracket F_n \rrbracket \rho$, donc $\Gamma = F_1 \bullet \ldots \bullet F_n \in \llbracket F_1 \rrbracket \rho \bullet \ldots \bullet \llbracket F_n \rrbracket \rho \subseteq \llbracket \Gamma \rrbracket \rho$ (par (T)) $\subseteq \overline{F}$. Or $\Gamma \in \overline{F}$ signifie par définition que $\Gamma \vdash_{sc} F$.

III. Recherche de preuve

1. Montrer que la prouvabilité en Gil_{sc} est décidable.

   On applique un algorithme de tableau, consistant à développer une preuve en Gil_{sc} à partir du but. Si on définit la taille d'un séquent comme la somme des tailles des formules qui le composent, toute prémisse est de taille strictement plus petite que la conclusion. De plus, il n'y a qu'un nombre fini de règles qui peuvent s'appliquer pour dériver un séquent (fini) donné. Donc la procédure de tableau termine.

2. En adaptant la preuve de la partie II (on ne demande pas de refaire toute la preuve! mais d'indiquer ce qui change), montrer que tout séquent non prouvable dans Gil admet un modèle $(M, \bullet, \epsilon, \leq)$ *fini*. On pourra restreindre CTX (resp. FORM) à des ensembles de contextes (resp. formules) finis appropriés.

   Fixons un séquent non prouvable $\Gamma_0 \vdash F_0$, et changeons la définition de FORM *et* CTX. *Soit* FORM *l'ensemble des sous-formules de Γ_0 ou de F_0. On quotiente maintenant l'ensemble des contextes usuels, et l'on choisit de définir* CTX *comme l'ensemble des contextes dits* pertinents*, à savoir ceux qui sont sous-multi-ensembles de contextes apparaissant dans au moins une expansion de tableaux de $\Gamma_0 \vdash F_0$ — il n'y en a qu'un nombre fini — union le symbole spécial $\circ$, dénotant tous les autres contextes. (En somme, on identifie tous les contextes qui ne sous pas*

multi-sous-ensembles d'aucun contexte pertinent pour la preuve de $\Gamma_0 \vdash F_0$.) CTX *est muni du contexte vide comme élément neutre, comme avant, et la loi $\bullet$ est le quotient de la loi de concaténation: $\Gamma \bullet \Delta = \Gamma, \Delta$ si Γ, Δ est pertinent, sinon $\Gamma \bullet \Delta = \circ$.*
D'autre part, on adapte la définition de la clôture de sorte que

$$X^* = \{\Gamma \in \text{CTX} | \forall \Delta \in \text{CTX} \cdot \forall F \in \text{FORM} \cdot (\forall \Theta \in X \cdot \Theta, \Delta \vdash_0 F) \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash_0 F\}$$

où $\Gamma \vdash_0 F$ signifie que le séquent $\Gamma \vdash F$ est prouvable dans Gil_{sc} ou bien que Γ est non pertinent; autrement dit, $\Gamma \vdash_0 F$ signifie "si Γ_0 est pertinent, alors $\Gamma_0 \vdash_{sc} F$". Toutes les preuves de la partie II passent: il s'agit d'une clôture stable (la preuve de la question II.1 n'utilise aucune hypothèse sur $\vdash_{sc}$, on peut donc remplacer cette relation par $\vdash_0$), et dans la question II.2, il suffit de remplacer $\vdash_{sc}$ par $\vdash_0$ et la définition de $\overline{F}$ par $\{\Gamma \in \text{CTX} | \Gamma \vdash_0 F\}$.

3. Quelles sont les règles inversibles de Gil_{sc}?

Les règles sans prémisses sont toujours inversibles. Les règles $[1 \vdash]$, $[\otimes \vdash]$, $[\vdash \multimap]$, $[\vdash \&]$ sont clairement inversibles.
La règle $[\vdash \otimes]$ n'est pas inversible, par exemple $A, B \vdash A \otimes B$ est prouvable mais uniquement en prenant $\Gamma = A$ et $\Delta = B$ (ou le contraire). De même $[\multimap \vdash]$ n'est pas inversible ($A, A \multimap B \vdash B$ est prouvable mais uniquement avec $\Gamma = A$ et Δ vide). Les règles $[\&_i \vdash]$ ne sont pas inversibles, par exemple $A_1 \,\&\, A_2 \vdash A_1 \,\&\, A_2$ est prouvable (par $[\vdash \&]$ d'abord, ensuite $[\&_i \vdash]$, puis $[Ax]$), mais aucune des prémisses possibles $A_i \vdash A_1 \,\&\, A_2$ n'est prouvable. De même $[\vdash \oplus_i]$ n'est pas inversible: considérer $A_1 \oplus A_2 \vdash A_1 \oplus A_2$.
Finalement, $[\oplus \vdash]$ est inversible: on a $[\![F_i]\!]\rho \leq [\![F_1]\!]\rho \cup [\![F_2]\!]\rho \subseteq ([\![F_1]\!]\rho \cup [\![F_2]\!]\rho)^* = [\![F_1 \oplus F_2]\!]\rho$, donc si $[\![\Gamma]\!]\rho \star [\![F_1 \oplus F_2]\!]\rho \subseteq [\![G]\!]\rho$, alors $[\![\Gamma]\!]\rho \star [\![F_i]\!]\rho \subseteq [\![G]\!]\rho$ par monotonie de $\star$.
En résumé:

Inversibles:	$[Ax]$	$[1 \vdash]$, $[\vdash 1]$	$[\bot \vdash]$, $[\vdash \top]$	$[\otimes \vdash]$	$[\vdash \multimap]$	$[\vdash \&]$	$[\oplus \vdash]$
Non-inversibles:				$[\vdash \otimes]$	$[\multimap \vdash]$	$[\&_i \vdash]$	$[\vdash \oplus_i]$

4. Quelles sont, parmi les formules suivantes, qui sont prouvables en MALL, celles qui sont prouvables en **LLI**?

$$A^{\bot\bot} \multimap A \qquad A \multimap A^{\bot\bot} \qquad A^{\bot\bot\bot} \multimap A^{\bot}$$

où $F^{\bot}$ dénote $F \multimap \bot$ en **LLI**. (On rappelle que $F^{\bot}$ et $F \multimap \bot$ sont linéairement équivalents en logique linéaire classique.)

On ne peut déduire $A^{\bot\bot} \multimap A$ que si on peut déduire $A^{\bot\bot} \vdash A$, par inversibilité de $[\vdash \multimap]$. Ici on ne peut appliquer que $[\multimap \vdash]$, résultant en les deux prémisses $\vdash A^{\bot}$ et $\bot \vdash A$. Si la deuxième est prouvable par $[\bot \vdash]$, la première est équivalent à $A \vdash \bot$, qui est un séquent qui ne peut être déduit par aucune règle de Gil_{sc}.
$A \multimap A^{\bot\bot}$ est prouvable:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,[Ax] \quad \dfrac{}{\bot \vdash \bot}}{A, A^{\bot} \vdash \bot}\,[\multimap \vdash]}{A \vdash A^{\bot\bot}}\,[\vdash \multimap]}{\vdash A \multimap A^{\bot\bot}}\,[\vdash \multimap]$$

La dernière formule est elle aussi prouvable, par la preuve suivante, où π dénote la preuve ci-dessus:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi}{A \vdash A^{\bot\bot}} \quad \dfrac{}{\bot \vdash \bot}}{A^{\bot\bot\bot}, A \vdash \bot}\,[\multimap \vdash]}{A^{\bot\bot\bot} \vdash A^{\bot}}\,[\vdash \multimap]}{\vdash A^{\bot\bot\bot} \multimap A^{\bot}}\,[\vdash \multimap]$$

5. On va décrire un algorithme de recherche de preuve dans Gil_{sc} par une méthode de tableaux plus sophistiquée que ce qui était demandé en III.1. Pour traiter des règles comme $[\vdash \otimes]$ qui demandent à découper le contexte en deux, Γ et Δ, on utilisera l'astuce suivante. D'abord, la fonction de preuve va prendre non pas un séquent $F_1, \ldots, F_n \vdash F$ en argument, mais un séquent étendu $F_1 : x_1, \ldots, F_n : x_n \vdash F$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables booléennes distinctes deux à deux. Elle devra retourner non pas oui ou non, mais une formule booléenne Φ de variables libres incluses dans $x_1, \ldots, x_n$ telle que $\rho \models \Phi$ si et seulement si $\Gamma' \vdash F$ est prouvable dans Gil_{sc}, où Γ' est le sous-contexte des F_i tels que $\rho(x_i)$ est vrai. Par exemple, sur $A : x, B : y, C : z \vdash A \oplus C$, Φ vaudra la formule $(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (z \wedge \neg x \wedge \neg y)$. On pourra considérer que l'on dispose d'une fonction auxiliaire $\exists x \cdot \Phi = \Phi[x := \text{faux}] \vee \Phi[x := \text{vrai}]$.

   Posons $\Phi(\underbrace{F_1 : x_1, \ldots, F_n : x_n}_{\Gamma} \vdash F)$ *la formule* Φ *à calculer. Traitons d'abord des règles inversibles (dans un ordre quelconque):*

   - $[Ax]$*: si* $F = F_i$ *est atomique, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) = (x_i \wedge \neg x_1 \wedge \ldots \neg x_{i-1} \wedge \neg x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \neg x_n) \vee (\neg x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \vdash F))$.
   - $[1 \vdash]$*: si* $F_i = 1$*, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) = \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\}, F)$.
   - $[\vdash 1]$*: si* $F = 1$*, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) = \neg x_1 \wedge \ldots \wedge \neg x_n$.
   - $[\bot \vdash]$*: si* $F_i = \bot$*, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) = x_i \vee (\neg x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \vdash F))$.
   - $[\vdash \top]$*: si* $F = \top$*, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) =$*vrai.*
   - $[\otimes \vdash]$*: si* $F_i = G_1 \otimes G_2$*, créer deux variables booléennes fraîches* y_1*,* y_2*, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) = (x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \cup \{G_1 : y_1, G_2 : y_2\} \vdash F)[y_1 := \textit{vrai}, y_2 := \textit{vrai}]) \vee (\neg x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \vdash F)$.
   - $[\vdash \multimap]$*: si* $F = G_1 \multimap G_2$*, créer une variable booléenne fraîche* y*, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) = \Phi(\Gamma \cup \{G_1 : y\} \vdash G_2)[y := \textit{vrai}]$.
   - $[\vdash \&]$*: si* $F = G_1 \,\&\, G_2$*, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) = \Phi(\Gamma \vdash G_1) \wedge \Phi(\Gamma \vdash G_2)$.
   - $[\oplus \vdash]$*: si* $F_i = G_1 \oplus G_2$*, créer deux variables booléennes fraîches* y_1*,* y_2*, alors* $\Phi(\Gamma \vdash F) = (x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \cup \{G_1 : y_1\} \vdash F)[y_1 := \textit{vrai}]) \vee (x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \cup \{G_2 : y_2\} \vdash F)[y_2 := \textit{vrai}]) \vee (\neg x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \vdash F))$.

   Ayant traité ces cas, il ne reste plus qu'à traiter des cas où Γ *ne contient que des* F_i *qui sont atomiques, des* $\top$*,* $\&$ *ou* $\multimap$*, et* F *est soit atomique différente de tous les* F_i*, soit un* $\bot$*, un* $\otimes$ *ou un* $\oplus$*. Construire les formules booléennes suivantes:*

   - $[\vdash \otimes]$*: si* $F = G_1 \otimes G_2$*, construire* n *variables booléennes fraîches* $z_1, \ldots, z_n$*. (Intuitivement,* z_i *sera vraie si* F_i *doit être utilisée dans le contexte servant à prouver* G_1*, fausse si* G_2*.) Construire alors la formule* $\exists z_1, \ldots, z_n \cdot (\Phi(\Gamma \vdash G_1)[x_1 := x_1 \wedge z_1, \ldots, x_n := x_n \wedge z_n] \wedge \Phi(\Gamma \vdash G_2)[x_1 := x_1 \wedge \neg z_1, \ldots, x_n := x_n \wedge \neg z_n])$.
   - $[\multimap \vdash]$*: pour tout* F_i *de la forme* $G_1 \multimap G_2$*, construire de même* n *variables booléennes fraîches* $z_1, \ldots, z_n$*, plus une autre* y*, et la formule* $(x_i \wedge \exists z_1, \ldots, z_n \cdot (\Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \vdash G_1)[x_1 := x_1 \wedge z_1, \ldots, x_n := x_n \wedge z_n] \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \cup \{G_2 : y\} \vdash F)[x_1 := x_1 \wedge \neg z_1, \ldots, x_n := x_n \wedge \neg z_n, y := \textit{vrai}])) \vee (\neg x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \vdash F))$.
   - $[\&_i \vdash]$*: pour tout* F_i *de la forme* $G_1 \,\&\, G_2$*, construire* $(x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \cup \{G_1 : y_1\} \vdash F)[y_1 := \textit{vrai}] \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \cup \{G_2 : y_2\} \vdash F)[y_2 := \textit{vrai}]) \vee (\neg x_i \wedge \Phi(\Gamma \setminus \{F_i : x_i\} \vdash F))$.
   - $[\vdash \oplus_i]$*: si* $F = G_1 \oplus G_2$*, construire* $\Phi(\Gamma \vdash G_1) \vee \Phi(\Gamma \vdash G_2)$.

   Finalement, poser $\Phi(\Gamma \vdash F)$ *la disjonction des quatre types de formules ci-dessus.*

   En pratique, on peut coder les formules booléennes en question sous forme de BDD, et couper les branches dont le Φ *retourne faux. On remarquera que l'on peut encore apporter de nombreuses optimisations à la procédure ci-dessus.*

Note bibliographique: toutes les questions sauf la dernière sont dues aux travaux de Dominique Larchey-Wendling. La dernière question est d'après James Harland.