# Logique intuitionniste linéaire **LLI**

### I. Calcul des séquents, espaces de phases

La *logique intuitionniste linéaire propositionnelle sans exponentielles* **LLI** est définie comme suit. D'abord, les formules sont définies par la grammaire:

$$F := A|1|\bot|\top|F \otimes F|F \,\&\, F|F \oplus F|F \multimap F$$

où $A$ parcourt un ensemble infini dénombrable de *variables propositionnelles*. Comparée à la syntaxe de MALL, la logique linéaire *classique* sans exponentielles, il manque 0 et le connecteur "par" (le $\&$ écrit à l'envers), et $\multimap$ est devenu un connecteur logique primitif. En particulier, $F \multimap G$ n'est plus une abréviation de $F^\perp$ par $G$.

Les règles du système $\mathsf{Gil}$ de séquents pour **LLI** sont données en figure 1. Les contextes $\Gamma$, $\Delta$, ..., sont des multi-ensembles de formules, et la virgule dénote l'union de multi-ensembles. On note $\mathsf{Gil}_{sc}$ le système sans la règle $[Cut]$ de coupure.

$$\frac{}{A \vdash A}\,[Ax] \qquad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta, F \vdash G}{\Gamma, \Delta \vdash G}\,[Cut]$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, 1 \vdash F}\,[1 \vdash] \qquad \frac{}{\vdash 1}\,[\vdash 1]$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash F}\,[\bot \vdash] \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\,[\vdash \top]$$

$$\frac{\Gamma, F, G \vdash H}{\Gamma, F \otimes G \vdash H}\,[\otimes \vdash] \qquad \frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta \vdash G}{\Gamma, \Delta \vdash F \otimes G}\,[\vdash \otimes]$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta, G \vdash H}{\Gamma, \Delta, F \multimap G \vdash H}\,[\multimap \vdash] \qquad \frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \multimap G}\,[\vdash \multimap]$$

$$\frac{\Gamma, F_i \vdash G}{\Gamma, F_1 \,\&\, F_2 \vdash G}\,[\&_i \vdash]\ (i = 1, 2) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \quad \Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \,\&\, F_2}\,[\vdash \&]$$

$$\frac{\Gamma, F_1 \vdash G \quad \Gamma, F_2 \vdash G}{\Gamma, F_1 \oplus F_2 \vdash G}\,[\oplus \vdash] \qquad \frac{\Gamma \vdash F_i}{\Gamma \vdash F_1 \oplus F_2}\,[\vdash \oplus_i]\ (i = 1, 2)$$

Figure 1: Le système $\mathsf{Gil}$

1. Un *monoïde commutatif* est un triplet $(M, \bullet, \epsilon)$, où $\bullet$ est associatif, commutatif et a $\epsilon$ pour élément neutre. On étend $\bullet$ aux sous-ensembles $X$, $Y$, de $M$ par $X \bullet Y = \{x \bullet y | x \in X, y \in Y\}$. Il est facile de voir que $(\mathbb{P}(M), \bullet, \{\epsilon\}, \subseteq)$ est un monoïde commutatif *ordonné*, ce qui signifie que $\subseteq$ est un ordre *compatible* avec $\bullet$:

$$\text{si } X \subseteq X' \text{ et } Y \subseteq Y', \text{ alors } X \bullet Y \subseteq X' \bullet Y'$$

Montrer que le monoïde commutatif ordonné $(\mathbb{P}(M), \bullet, \{\epsilon\}, \subseteq)$ est *résidué*, c'est-à-dire qu'il existe une opération binaire $\multimap\!\!\bullet$, le *résidu*, telle que

$$X \bullet Y \subseteq Z \text{ ssi } X \subseteq Y \multimap\!\!\bullet\, Z$$

2. Une *clôture* sur $M$ est une fonction $X \in \mathbb{P}(M) \mapsto X^* \in \mathbb{P}(M)$ qui est monotone ($X \subseteq Y$ implique $X^* \subseteq Y^*$), et vérifie:

   $$(T)\ X \subseteq X^* \qquad (4)\ X^{**} \subseteq X^*$$

   (Par exemple, si $M$ est un espace topologique, alors $X^*$ défini comme étant l'adhérence de $X$ est une clôture. Les esprits fins auront remarqué une parenté avec la logique modale S4.)

   Une clôture est *stable* si et seulement si $X^* \bullet Y^* \subseteq (X \bullet Y)^*$ pour tous $X, Y \subseteq M$.

   Si $(\_)^*$ est une clôture stable, on appellera $(M, \bullet, \epsilon, (\_)^*)$ un *espace de phases*.

   Étant donné un environnement $\rho$ qui à chaque variable propositionnelle $A$ associe un élément de $M$, on définit la sémantique $[\![F]\!]\,\rho$ de la formule $F$ comme en figure 2.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
[\![A]\!]\,\rho & = & \{\rho(A)\}^* & [\![F \multimap G]\!]\,\rho & = & [\![F]\!]\,\rho \multimap\!\!\bullet\, [\![G]\!]\,\rho \\
[\![1]\!]\,\rho & = & \{\epsilon\}^* & [\![F \otimes G]\!]\,\rho & = & ([\![F]\!]\,\rho \bullet [\![G]\!]\,\rho)^* \\
[\![\bot]\!]\,\rho & = & \emptyset^* & [\![F \oplus G]\!]\,\rho & = & ([\![F]\!]\,\rho \cup [\![G]\!]\,\rho)^* \\
[\![\top]\!]\,\rho & = & M & [\![F \mathbin{\&} G]\!]\,\rho & = & [\![F]\!]\,\rho \cap [\![G]\!]\,\rho
\end{array}$$

Figure 2: La sémantique des espaces de phases

3. Montrer que $[\![F]\!]\,\rho$ est un ensemble *clos*. Un ensemble $X \subseteq M$ est *clos* si et seulement s'il existe $Y$ tel que $X = Y^*$ (ou de façon équivalente, si $X = X^*$; les deux conditions sont équivalents parce que $Y^{**} = Y^*$). On pourra donc considérer que les ensembles clos sont les valeurs de vérité de **LLI**. On notera $\mathbb{B}(M)$ l'ensemble des parties closes de $M$.

4. On pose $X \star Y = (X \bullet Y)^*$. Montrer que $(\mathbb{B}(M), \star, \{\epsilon\}^*, \subseteq)$ est encore un monoïde commutatif ordonné, résidué par $\multimap\!\!\bullet$.

5. Montrer que $\emptyset^*$ est un élément absorbant pour $\star$: pour tout $X$ clos, $X \star \emptyset^* = \emptyset^*$; que $\emptyset^*$ est le plus petit ensemble clos; que $M$ est le plus grand; que $X \cap Y$ est la borne inférieure de $X, Y \in \mathbb{B}(M)$ et $(X \cup Y)^*$ est leur borne supérieure. (Donc $(\mathbb{B}(M), \subseteq, \emptyset^*, M, \cap, (\_ \cup \_)^*)$ est un *treillis* dont le minimum $\emptyset^*$ est absorbant pour $\star$.)

6. Déduire des questions précédentes que la sémantique de la figure 2 est *correcte* par rapport à $\mathsf{Gil}$, au sens où pour tout séquent $\Gamma \vdash F$ dérivable dans $\mathsf{Gil}$, on a $[\![\Gamma]\!]\,\rho \subseteq [\![F]\!]\,\rho$. On pose ici $[\![\Gamma]\!]\,\rho = [\![F_1]\!]\,\rho \star \ldots \star [\![F_n]\!]\,\rho$ si $\Gamma = F_1, \ldots, F_n$; si $n = 0$, ceci dénote $\{\epsilon\}^*$.

### II. Complétude

On va montrer la complétude de la sémantique des espaces de phases pour $\mathsf{Gil}$.

Soit $\textsc{Form}$ l'ensemble de toutes les formules de **LLI**, et $\textsc{Ctx}$ l'ensemble de tous les contextes $\Gamma$ de **LLI**. Clairement, $\textsc{Ctx}$ est un monoïde $M$ dont l'élément neutre $\epsilon$ est le contexte vide et la loi $\bullet$ est l'union (multi-ensembles) des contextes. On définit un opérateur $(\_)^*$ pour tout ensemble $X$ de contextes par:

$$X^* = \{\Gamma \in \textsc{Ctx} | \forall \Delta \in \textsc{Ctx} \cdot \forall F \in \textsc{Form} \cdot (\forall \Theta \in X \cdot \Theta, \Delta \vdash_{sc} F) \Rightarrow \Gamma, \Delta \vdash_{sc} F\}$$

où $\vdash_{sc}$ est la relation de déduction dans le système sans coupures $\mathsf{Gil}_{sc}$.

1. Montrer que $X \mapsto X^*$ définit une clôture stable sur $(\textsc{Ctx}, \bullet, \epsilon)$. (Indication: ceci n'utilise aucune propriété de $\vdash_{sc}$, et est totalement algébrique. Si vous vous perdez dans les hypothèses, essayez d'utiliser un assistant de preuves comme Coq par exemple pour garder trace des hypothèses que vous pouvez utiliser à chaque instant.)

2. À toute formule $F$ on peut associer deux ensembles de contextes, un ensemble minimal $\underline{F} = \{F\}$ qui ne contient que le seul contexte réduit à la formule $F$, et un ensemble maximal $\overline{F} = \{\Gamma \in \textsc{Ctx} | \Gamma \vdash_{sc} F\}$, de tous les contextes dont on peut déduire $F$ sans coupure.

   On considère la valuation $\rho$ qui à toute variable propositionnelle $A$ associe la formule $A$ elle-même. Montrer alors que
   $$\underline{F} \subseteq [\![F]\!]\,\rho \subseteq \overline{F}$$
   pour toute formule $F$ de **LLI**. On rappelle que par les résultats de la partie I, $[\![F]\!]\,\rho$ est toujours un ensemble clos de contextes. (Note: cette question est relativement longue. Elle se fait entièrement sémantiquement: la syntaxe n'intervient que pour appliquer des règles de déduction, jamais pour analyser les formes possibles de déductions dans $\mathsf{Gil}_{sc}$.)

3. En déduire que tout séquent valide dans la sémantique des espaces de phases est prouvable (complétude), et ce *sans coupure* (élimination des coupures). On dit que $\Gamma \vdash F$ est *valide* ssi $[\![\Gamma]\!]\,\rho \subseteq [\![F]\!]\,\rho$ dans tout espace de phases et pour toute valuation $\rho$.

### III. Recherche de preuve

1. Montrer que la prouvabilité en $\mathsf{Gil}_{sc}$ est décidable.

2. En adaptant la preuve de la partie II (on ne demande pas de refaire toute la preuve! mais d'indiquer ce qui change), montrer que tout séquent non prouvable dans $\mathsf{Gil}$ admet un modèle $(M, \bullet, \epsilon, \leq)$ *fini*. On pourra restreindre $\textsc{Ctx}$ (resp. $\textsc{Form}$) à des ensembles de contextes (resp. formules) finis appropriés.

3. Quelles sont les règles inversibles de $\mathsf{Gil}_{sc}$?

4. Quelles sont, parmi les formules suivantes, qui sont prouvables en MALL, celles qui sont prouvables en **LLI**?
   $$A^{\perp\perp} \multimap A \qquad A \multimap A^{\perp\perp} \qquad A^{\perp\perp\perp} \multimap A^{\perp}$$
   où $F^{\perp}$ dénote $F \multimap \perp$ en **LLI**. (On rappelle que $F^{\perp}$ et $F \multimap \perp$ sont linéairement équivalents en logique linéaire classique.)

5. On va décrire un algorithme de recherche de preuve dans $\mathsf{Gil}_{sc}$ par une méthode de tableaux plus sophistiquée que ce qui était demandé en III.1. Pour traiter des règles comme $[\vdash \otimes]$ qui demandent à découper le contexte en deux, $\Gamma$ et $\Delta$, on utilisera l'astuce suivante. D'abord, la fonction de preuve va prendre non pas un séquent $F_1, \ldots, F_n \vdash F$ en argument, mais un séquent étendu $F_1 : x_1, \ldots, F_n : x_n \vdash F$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables booléennes distinctes deux à deux. Elle devra retourner non pas oui ou non, mais une formule booléenne $\Phi$ de variables libres incluses dans $x_1, \ldots, x_n$ telle que $\rho \models \Phi$ si et seulement si $\Gamma' \vdash F$ est prouvable dans $\mathsf{Gil}_{sc}$, où $\Gamma'$ est le sous-contexte des $F_i$ tels que $\rho(x_i)$ est vrai. Par exemple, sur $A : x, B : y, C : z \vdash A \oplus C$, $\Phi$ vaudra la formule $(x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (z \wedge \neg x \wedge \neg y)$. On pourra considérer que l'on dispose d'une fonction auxiliaire $\exists x \cdot \Phi = \Phi[x := \text{faux}] \vee \Phi[x := \text{vrai}]$.

Note bibliographique: toutes les questions sauf la dernière sont dues aux travaux de Dominique Larchey-Wendling. La dernière question est d'après James Harland.