Le $\lambda\upsilon$-calcul.

Correction.

Documents autorisés (en particulier le poly).

Le but de ce problème est d'étudier le $\lambda\upsilon$-calcul, un λ-calcul à substitutions explicites proposé par J. Rouyer-Degli et P. Lescanne en 1994.

Comme dans le $\lambda\sigma$-calcul, les *expressions* du $\lambda\upsilon$-calcul sont ceux définis par la grammaire :

$$
\begin{array}{rcll}
 & & & \text{Termes} \\
M, N, P, \ldots & ::= & x & \text{Variables} \\
 & | & 1 & \text{Indice de de Bruijn 1} \\
 & | & MM & \text{Applications} \\
 & | & \lambda M & \text{Abstractions} \\
 & | & M[S] & \text{Application de substitution} \\
 & & & \text{Piles (substitutions explicites)} \\
S & ::= & \uparrow & \text{Shift} \\
 & | & \Uparrow S & \text{Lift} \\
 & | & M/ & \text{Slash}
\end{array}
$$

Les changements par rapport au $\lambda\sigma$-calcul sont : 1. on a un opérateur explicite $\Uparrow$, et $\Uparrow S$ correspond à la pile $1 \cdot (S \circ \uparrow)$ du $\lambda\sigma$-calcul; 2. on a un nouvel opérateur de pile $/$, et $M/$ correspond à la pile $M \cdot id$ du $\lambda\sigma$-calcul; 3. on n'a pas les constructions $M \cdot S$ et $S \circ S'$ du $\lambda\sigma$-calcul. De plus, on n'a pas de variable de pile.

La traduction d'un λ-terme u en un $\lambda\upsilon$-term $u^\bullet(\ell)$ (dans le contexte de la liste de variables ℓ) est définie comme suit. Pour tout entier $n \geq 1$, on note aussi n le terme $1\underbrace{[\uparrow][\uparrow]\ldots[\uparrow]}_{n-1 \text{ fois}}$.

$$
\begin{array}{rcll}
x^\bullet(\ell) & \hat{=} & i & \text{si } i \text{ est le premier entier tel que } x = \ell(i) \\
 & & x\underbrace{[\uparrow][\uparrow]\ldots[\uparrow]}_{n \text{ fois}} & \text{si } x \text{ n'est pas dans } \ell, n \text{ est la longueur de } \ell \\
(uv)^\bullet(\ell) & \hat{=} & u^\bullet(\ell)v^\bullet(\ell) & \\
(\lambda x \cdot u)^\bullet(\ell) & \hat{=} & \lambda(u^\bullet(x :: \ell)) &
\end{array}
$$

(On rappelle que la liste ℓ de longueur n est la suite $\ell(1), \ell(2), \ldots, \ell(n)$.)

(β)	$(\lambda M)N \to M[N/]$		
$(Var/)$	$1[M/] \to M$	$(Var \Uparrow)$	$1[\Uparrow S] \to 1$
$(\uparrow /)$	$(n+1)[N/] \to n$	$(\uparrow\Uparrow)$	$(n+1)[\Uparrow S] \to n[S][\uparrow]$
(App)	$(MN)[S] \to M[S](N[S])$	(Lam)	$(\lambda M)[S] \to \lambda(M[\Uparrow S])$

Figure 1: Les règles de réduction de $\lambda\upsilon$ ($n \geq 1$)

Les règles de réduction du $\lambda\upsilon$-calcul sont données en figure 1. Le système formé de toutes les règles sauf (β) s'appelle υ.

I. Le système $\mathcal{D}$ pour $\lambda\upsilon$

Le système de types $\mathcal{D}$ a pour types :

$$F ::= b | F \Rightarrow F | F \cap F$$

où b parcourt un ensemble fixé de types de base. Intuitivement, la signification de $\cap$ est qu'un terme de type $F \cap G$ est un terme qui est à la fois de type F et de type G.

Les règles de typage du système $\mathcal{D}$ sont données en figure 2. Dans la suite, on admettra la propriété d'autoréduction : si $\Gamma \vdash M : F$ et $M \to N$ alors $\Gamma \vdash N : F$. On se propose de démontrer par une méthode de réductibilité adaptée que les $\lambda\upsilon$-termes typés dans le système $\mathcal{D}$ sont fortement normalisants.

$$\frac{}{F_1, \ldots, F_n \vdash 1 : F_1}\ (1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash N : F}{\Gamma \vdash MN : G}\ (App) \qquad \frac{F, \Gamma \vdash M : G}{\Gamma \vdash \lambda M : F \Rightarrow G}\ (\lambda)$$

$$\frac{\Delta \vdash M : F \quad \Gamma \vdash S : \Delta}{\Gamma \vdash M[S] : F}\ ([]) \qquad \frac{}{F, \Gamma \vdash \uparrow : \Gamma}\ (\uparrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : F}{\Gamma \vdash M/ : F, \Gamma}\ (/) \qquad \frac{\Gamma \vdash S : \Delta}{F, \Gamma \vdash \Uparrow S : F, \Delta}\ (\Uparrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : F \quad \Gamma \vdash M : G}{\Gamma \vdash M : F \cap G}\ (\cap I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : F \cap G}{\Gamma \vdash M : F}\ (\cap E_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : F \cap G}{\Gamma \vdash M : G}\ (\cap E_2)$$

Figure 2: Le système $\mathcal{D}$ des types intersection pour $\lambda\upsilon$

Soit SN l'ensemble des $\lambda\upsilon$-termes fortement normalisants, $RED_b \hat{=} SN$ pour tout type de base b, $RED_{F \cap G} \hat{=} RED_F \cap RED_G$, et $RED_{F \Rightarrow G}$ est l'ensemble des $\lambda\upsilon$-termes $M \in SN$ tels que, pour tout M_1 tel que $M \to^* \lambda M_1$, pour tout $N \in RED_F$, $M_1[N/] \in RED_G$.

1. Montrer les propriétés :

(CR1) si $M \in RED_F$ alors $M \in SN$.

(CR2) Si $M \in RED_F$ et $M \to M'$, alors $M' \in RED_F$.

(CR3) Si M est neutre (pas de la forme λM_1), et pour tout M' tel que $M \to M'$, $M' \in RED_F$, alors $M \in RED_F$.

(CR1) est par définition. (CR2) et (CR3) sont par récurrence structurelle sur F. Si F est un type de base, $RED_F = SN$ et les propriétés sont évidentes. Si $F = F_1 \Rightarrow F_2$:

(CR2) supposons $M \in RED_{F_1 \Rightarrow F_2}$. Si $M \to M'$, alors $M' \in SN$ puisque $M \in SN$. Supposons maintenant $M' \to^* \lambda M_1$. Alors $M \to^* \lambda M_1$ aussi, donc par définition pour tout $N \in RED_{F_1}$, $M_1[N/] \in RED_{F_2}$. Mais ceci implique que $M' \in RED_{F_1 \Rightarrow F_2}$.

(CR3) Supposons que tout réduit M' en une étape de M est dans $RED_{F_1 \Rightarrow F_2}$, et M est neutre. D'abord, M est dans SN, car tout réduit en une étape M' de M est dans $RED_{F_1 \Rightarrow F_2} \subseteq SN$. Supposons maintenant que $M \to^* \lambda M_1$, et que pour tout $N \in RED_{F_1}$, $M_1[N/] \in RED_{F_2}$. Comme M est neutre, la réduction donnée de M vers λM_1 contient au moins une étape, et est donc de la forme $M \to M' \to^* \lambda M_1$. Par hypothèse $M' \in RED_{F_1 \Rightarrow F_2}$, donc par définition $M_1[N/] \in RED_{F_2}$ pour tout $N \in RED_{F_1}$. Il s'ensuit que $M \in RED_{F_1 \Rightarrow F_2}$.

Si $F = F_1 \cap F_2$:

(CR2) *supposons* $M \in RED_{F_1 \cap F_2}$ *et* $M \to N$*. Alors* $M \in RED_{F_1}$ *et* $M \in RED_{F_2}$*, donc par hypothèse de récurrence* $N \in RED_{F_1}$ *et* $N \in RED_{F_2}$*, donc* $N \in RED_{F_1 \cap F_2}$*.*

(CR3) *supposons* M *neutre, et tout réduit* M' *en une étape est dans* $RED_{F_1 \cap F_2}$*. Donc tout réduit* M' *en une étape est dans* RED_{F_1} *(resp.* RED_{F_2}*), donc par hypothèse de récurrence (CR3)* M *est dans* RED_{F_1} *(resp.* RED_{F_2}*). Donc* $M \in RED_{F_1 \cap F_2}$*.*

2. Montrer que si $M \in RED_{F \Rightarrow G}$ et $N \in RED_F$, alors $MN \in RED_G$.

   C'est par (CR3), vu que MN *est neutre. Par (CR1), on peut effectuer une récurrence sur* (M, N) *ordonné par le produit lexicographique de* $\to$ *par* $\to$*.* MN *peut se réduire en* $M'N$ *avec* $M \to M'$*, qui est dans* RED_G *par hypothèse de récurrence, en* MN' *avec* $N \to N'$*, qui est encore dans* RED_G *pour la même raison, ou alors en* $M_1[N/]$ *si* M *est de la forme* λM_1*. Or par définition de* $RED_{F \Rightarrow G}$*,* $M_1[N/]$ *est dans* RED_G*. On conclut par (CR3).*

3. Montrer que toute pile S est soit de la forme $\Uparrow^p (\uparrow)$ soit de la forme $\Uparrow^p (N/)$, $p \geq 0$. Dans la suite, on exploitera ce fait en décrivant les $\lambda\upsilon$-termes sous forme de la (pseudo-)grammaire :

$$M ::= 1 \mid MM \mid \lambda M \mid M[\Uparrow^p (\uparrow)] \mid M[\Uparrow^p (M/)]$$

   Par récurrence structurelle sur S*. Si* $S = \uparrow$*, il est de la première forme avec* $p = 0$*. Si* $S = \Uparrow S'$*, c'est par appel direct à l'hypothèse de récurrence. Si* $S = M/$*, il est de la deuxième forme avec* $p = 0$*.*

   Noter que la pseudo-grammaire est erronée dans l'énoncé, on aurait dû écrire :

$$M ::= x \mid 1 \mid MM \mid \lambda M \mid M[\Uparrow^p (\uparrow)] \mid M[\Uparrow^p (M/)]$$

4. Une *suite de piles* σ est une liste $[S_1][S_2] \ldots [S_k]$, où $S_1, \ldots, S_k$ sont des piles. On note ϵ pour la suite vide, et $M\sigma$ pour $M[S_1][S_2] \ldots [S_k]$.

   On dit que σ est réductible de type $\Gamma \vdash \Lambda$, en abrégé $\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Lambda}$, si et seulement le jugement $\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Lambda}$ est déductible dans le système :

$$\frac{}{\epsilon \in RED_{\Gamma \vdash \Gamma}} (\epsilon RED) \quad \frac{\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Xi, G, \Delta}}{[\Uparrow^p (\uparrow)]\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Xi, \Delta}} (\uparrow RED) \quad \frac{\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Xi, \Delta} \quad N[\uparrow]^p\sigma \in RED_G}{[\Uparrow^p (N/)]\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Xi, G, \Delta}} (/RED)$$

   où Ξ est de longueur p. La stratégie que l'on va employer pour montrer la normalisation forte va être de montrer que si $\Delta \vdash M : F$ est dérivable, alors pour tout $\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Delta}$, $M\sigma \in RED_F$. (On pourra comparer avec la méthode du cours pour le λ-calcul typé, où l'on montre que $M[x_1 := N_1, \ldots, x_n := N_n] \in RED_F$ pour tous $N_1 \in RED_{F_1}, \ldots, N_n \in RED_{F_n}$, et $\Gamma = x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$.)

   On définit la *liste d'arguments* $args(\sigma)$ de σ par : $args(\epsilon) \hat{=} \epsilon$, $args(\sigma[\Uparrow^p (\uparrow)]) \hat{=} args(\sigma)$, et $args(\sigma[\Uparrow^p (N/)]) \hat{=} args(\sigma), N$. On ordonne les listes d'arguments par l'extension lexicographique $\to_{lex}$: $N_1, \ldots, N_m \to_{lex} N'_1, \ldots, N'_n$ si et seulement si $m > n$, ou $m = n$ et $N_1 \to N'_1$, ou $m = n$, $N_1 = N'_1$ et $N_2 \to N'_2, \ldots$, ou $m = n$, $N_1 = N'_1, \ldots, N_{m-1} = N'_{m-1}$ et $N_m \to N'_m$.

   Pourquoi $\to_{lex}$ est-il bon (pas de chaîne infinie décroissante) sur les suites de piles dans RED_Γ ?

   Car les suites d'arguments sont des suites de termes N *tels que* $N[\uparrow]^p\sigma$ *sont réductibles de divers types, pour certaines valeurs de* p *et de* σ*. Donc ces* $N[\uparrow]^p\sigma$ *sont dans* SN *par (CR1), donc* N *est dans* SN*. D'autre part l'extension lexicographique de* $\to$*, qui est bon, est bonne. (La question contient au passage une erreur de frappe : on aurait dû dire "sur les suites de piles dans* $RED_{\Gamma \vdash \Delta}$*".)*

5. Montrer que pour tout $\sigma \in RED_{\Gamma \vdash F, \Delta}$, $1\sigma \in RED_F$. (Indication : utiliser (CR3) et effectuer une récurrence sur une mesure entière bien choisie de σ.)

   On définit la mesure $w(\sigma)$ *définie par* $w(\epsilon) \hat{=} 0$*,* $w(\sigma[\Uparrow^p (\uparrow)]) \hat{=} w(\sigma) + p$*,* $w(\sigma[\Uparrow^p (N/)]) \hat{=} w(\sigma) + p + 1$*, qui compte le nombre de* $\Uparrow$ *et de* $/$ *dans* σ*. On va montrer la question par récurrence sur* $(w(\sigma), args(\sigma))$ *ordonné par le produit lexicographique de l'ordre* $>$ *sur les entiers et de* $\to_{lex}$*.*

Comme 1σ est neutre, on va utiliser (CR3), et examiner tous les réduits en une étape de 1σ. Si le rédex contracté est dans un des arguments de σ, alors c'est par hypothèse de récurrence. (Techniquement, on utilise (CR2) pour le réduit $1\sigma'$ est tel que $\sigma' \in RED_{F,\Gamma}$ encore.) Sinon, c'est que 1σ s'écrit sous la forme $1\sigma'\sigma''$, où $1\sigma'$ est le rédex contracté, par l'une des règles $(Var/)$, $(Var \Uparrow)$, $(\uparrow /)$, $(\uparrow\Uparrow)$.

Si c'est $(Var/)$, alors $\sigma' = [M/]$. Comme $[M/]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash F,\Delta}$ par hypothèse, c'est que $(/RED)$ a été utilisée, donc en particulier $M\sigma'' \in RED_F$, ce que l'on souhaitait démontrer.

Si c'est $(Var \Uparrow)$, alors $\sigma' = [\Uparrow S]$, et le réduit en une étape est $1\sigma''$. On a deux sous-cas. Si $\sigma' = [\Uparrow^{p+1} (\uparrow)]$, c'est qu'on a utilisé $(\uparrow RED)$, donc Δ s'écrit Ξ, Λ avec Ξ de longueur p, et $\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash F,\Xi,G,\Lambda}$. Or $w(\sigma'') < w(\sigma)$, donc on peut utiliser l'hypothèse de récurrence et conclure que le réduit en une étape $1\sigma''$ est dans RED_F. Si $\sigma' = [\Uparrow^{p+1} (N/)]$, de même Δ s'écrit Ξ, G, Λ et $\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash F,\Xi,\Lambda}$. Comme de nouveau $w(\sigma'') < w(\sigma)$, on en conclut encore que $1\sigma''$ est dans RED_F.

Si c'est $(\uparrow /)$, alors $\sigma' = [\uparrow]^n[N/]$, et le réduit en une étape est $1[\uparrow]^{n-1}\sigma''$. Or $w([\uparrow]^{n-1}\sigma'') < w(\sigma'\sigma'')$, donc on peut utiliser l'hypothèse de récurrence et conclure que le réduit $1[\uparrow]^{n-1}\sigma''$ est dans RED_F. Encore faut-il vérifier que $[\uparrow]^{n-1}\sigma''$ est réductible d'un type convenable. Or par hypothèse $\sigma'\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash F,\Delta}$, donc en utilisant $(\uparrow RED)$ $[N/]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash G_1,\ldots,G_n,F,\Delta}$ (avec $n \geq 1$). Donc par $(/RED)$ $\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash G_2,\ldots,G_n,F,\Delta}$. En réutilisant $(\uparrow RED)$, on en déduit que $[\uparrow]^{n-1}\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash F,\Delta}$, ce qui est de la bonne forme.

Si c'est $(\uparrow\Uparrow)$ finalement, alors $\sigma' = [\uparrow]^n[\Uparrow S]$, et le réduit en une étape est $1[\uparrow]^{n-1}[S][\uparrow]\sigma''$. Par hypothèse, $[\Uparrow S]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash G_1,\ldots,G_n,F,\Delta}$. On a deux sous-cas :

- *Si $S = \Uparrow^p (\uparrow)$, $\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash G_1,\Xi,G,\Lambda}$, où $G_1, \Xi, \Lambda = G_1, G_2, \ldots, G_n, F, \Delta$ et G_1, Ξ est de longueur $p+1$ (donc Ξ est de longueur p). Donc $[\uparrow]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash\Xi,G,\Lambda}$, donc $[S][\uparrow]\sigma'' = [\Uparrow^p (\uparrow)][\uparrow]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash\Xi,\Lambda} = RED_{\Gamma\vdash G_2,\ldots,G_n,F,\Delta}$. Donc $[\uparrow]^{n-1}[S][\uparrow]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash F,\Delta}$. Comme $w([\uparrow]^{n-1}[S][\uparrow]\sigma'') < w([\uparrow]^n[\Uparrow S]\sigma'')$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure que $1[\uparrow]^{n-1}[S][\uparrow]\sigma'' \in RED_F$;*
- *Si $S = \Uparrow^p (N/)$, comme $[\Uparrow^{p+1} (N/)]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash G_1,\ldots,G_n,F,\Delta}$. Donc on peut écrire $G_1, \ldots, G_n, F, \Delta$ sous la forme G_1, Ξ, G, Λ avec Ξ de longueur p, $\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash G_1,\Xi,\Lambda}$, et $N[\uparrow]^{p+1}\sigma'' \in RED_G$. Ce dernier implique que $N[\uparrow]^p[\uparrow]\sigma'' \in RED_G$. De plus, $[\uparrow]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash\Xi,\Lambda}$. Donc $[\Uparrow^p (N/)][\uparrow]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash\Xi,G,\Lambda} = RED_{\Gamma\vdash G_2,\ldots,G_n,F,\Delta}$. Donc $[\uparrow]^{n-1}[\Uparrow^p (N/)][\uparrow]\sigma'' \in RED_{\Gamma\vdash F,\Delta}$. De plus, comme $w([\uparrow]^{n-1}[\Uparrow^p (N/)][\uparrow]\sigma'') < w([\uparrow]^n[\Uparrow^{p+1} (N/)]\sigma'')$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence et conclure que le réduit en une étape est encore dans RED_F.*

6. Posons $|\Delta \vdash F| \hat{=} \{M | \forall\Gamma \cdot \forall\sigma \in RED_{\Gamma\vdash\Delta} \cdot M\sigma \in RED_F\}$. Montrer que, pour toutes listes Ξ et Λ de formules, où Ξ est de longueur p :

   (a) si $M \in |\Xi, \Lambda \vdash F|$ alors $M[\Uparrow^p (\uparrow)] \in |\Xi, G, \Lambda \vdash F|$;

   (b) si $M \in |\Xi, G, \Lambda \vdash F|$ et $N \in |\Lambda \vdash G|$, alors $M[\Uparrow^p (N/)] \in |\Xi, \Lambda \vdash F|$.

   (a) Soit $\sigma \in RED_{\Gamma\vdash\Xi,G,\Lambda}$ quelconque. Par $(\uparrow RED)$, $[\Uparrow^p (\uparrow)]\sigma \in RED_{\Gamma\vdash\Xi,\Lambda}$. Donc $M[\Uparrow^p (\uparrow)]\sigma \in RED_F$. Comme σ est quelconque, $M[\Uparrow^p (\uparrow)] \in |\Xi, G, \Lambda \vdash F|$.

   (b) Soit $\sigma \in RED_{\Gamma\vdash\Xi,\Lambda}$ quelconque. Par $(\uparrow RED)$, $[\uparrow]^p\sigma \in RED_{\Gamma\vdash\Lambda}$, donc par hypothèse $N[\uparrow]^p\sigma \in RED_G$. Par $(/RED)$, il s'ensuit que $[\Uparrow^p (N/)]\sigma \in RED_{\Gamma\vdash\Xi,G,\Delta}$. Donc par hypothèse sur M, $M[\Uparrow^p (N/)]\sigma \in RED_F$. Comme σ est quelconque, $M[\Uparrow^p (N/)] \in |\Xi, \Lambda \vdash F|$.

7. On admettra d'une part que si $M \in |\Gamma \vdash F \Rightarrow G|$ et $N \in |\Gamma \vdash F|$, alors $MN \in |\Gamma \vdash G|$, d'autre part que si $M \in |F, \Gamma \vdash G|$ alors $\lambda M \in |\Gamma \vdash F \Rightarrow G|$. Déduire de ces remarques et des questions précédentes que si $\Gamma \vdash M : F$ est déductible, alors $M \in |\Gamma \vdash F|$.

   Par récurrence structurelle sur la dérivation donnée de $\Gamma \vdash M : F$. La question 5 montre que $1 \in |F_1, \ldots, F_n \vdash F_1|$, donc c'est vrai lorsque $M = 1$. La question 6 traite du cas de la règle $([])$. Les hypothèses admises dans la question permettent de traiter des cas des règles (App) et (λ). Les règles intersection sont évidentes, vu que $|\Gamma \vdash G_1 \cap G_2| = |\Gamma \vdash G_1| \cap |\Gamma \vdash G_2|$.

8. En conclure que tout $\lambda\upsilon$-terme typé dans le système $\mathcal{D}$ est fortement normalisant.

   Par la question précédente, $M \in |\Gamma \vdash F|$. Or par (ϵ), $\epsilon \in RED_{\Gamma\vdash\Gamma}$, donc par la définition de $|\Gamma \vdash F|$, $M = M\epsilon \in RED_F$. Par (CR1) $M \in SN$.

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\ (Ax)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G}\ (App) \qquad \frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F \Rightarrow G}\ (\lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \quad \Gamma \vdash u : G}{\Gamma \vdash u : F \cap G}\ (\cap I) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : F \cap G}{\Gamma \vdash u : F}\ (\cap E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F \cap G}{\Gamma \vdash u : G}\ (\cap E_2)$$

Figure 3: Le système $\mathcal{D}$ des types intersection pour le λ-calcul

II. Le système $\mathcal{D}$ pour le λ-calcul, préservation de la normalisation forte

Le système $\mathcal{D}$ pour le λ-calcul est défini dans la figure 3. Noter que, alors que les contextes Γ de la figure 2 étaient des listes de formules, ici les contextes Γ sont des ensembles finis de liaisons $x : F$, sans variable répétée. On admettra, sans les démontrer, les propriétés :

(a) Si $u \to v$ en λ-calcul, alors $u^\bullet(\ell) \to^+ v^\bullet(\ell)$ en $\lambda\upsilon$ (similaire au théorème 3, p. 15 de la partie III du cours).

(b) Si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable dans le système de la figure 3, et $u \to v$, alors $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable dans le système de la figure 3 (auto-réduction).

(c) Si $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n \vdash u : F$ est dérivable dans le système de la figure 3, alors $F_1, \ldots, F_n \vdash u^\bullet(x_1, \ldots, x_n) : F$ est dérivable dans le système de la figure 2.

1. Déduire de la partie I que tous les λ-termes typés dans le système $\mathcal{D}$ (figure 3) sont fortement normalisants.

   Si u est typable en système $\mathcal{D}$, par (c) $u^\bullet(\ell)$ est typable dans le système $\mathcal{D}$ (figure 2), où ℓ est la liste des variables apparaissant dans le contexte de typage. Par la partie précédente, $u^\bullet(\ell)$ est donc fortement normalisant. Donc u l'est aussi, par (a).

2. Étant donnés deux contextes Γ et Δ, on note $\Gamma \cap \Delta$ le contexte qui donne à toute variable x le type $F \cap G$, si $x : F \in \Gamma$ et $x : G \in \Delta$; le type F si $x : F \in \Gamma$ mais x n'apparaît pas dans Δ; le type G si $x : G \in \Delta$ mais x n'apparaît pas dans Γ.

   On rappelle qu'un λ-terme u en forme normale est de la forme $\lambda x_1, \ldots, x_n \cdot hu_1 \ldots u_m$, où h est une variable et $u_1, \ldots, u_n$ sont eux-mêmes normaux. Montrer que tout λ-terme normal est typable dans le système de la figure 3. Plus précisément, on montrera que tout terme normal $\lambda x_1, \ldots, x_n \cdot hu_1 \ldots u_m$ est typable d'un certain type $F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow F_0$, dans un certain contexte Γ, où F_0 est un type fixé quelconque.

   Par récurrence sur la forme normale de u, on va démontrer que tout terme normal $\lambda x_1, \ldots, x_n \cdot hu_1 \ldots u_m$ est typable d'un certain type $F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow F_0$, dans un certain contexte Γ, où F_0 est un type fixé. Par hypothèse de récurrence, on peut dériver $\Gamma_1 \vdash u_1 : G_1, \ldots, \Gamma_n \vdash u_m : G_m$. Donc $\Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_n \cap (h : G_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow G_m \Rightarrow F_0) \vdash hu_1 \ldots u_m : F_0$. Écrivons $\Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_n \cap (h : G_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow G_m \Rightarrow F_0)$ sous la forme $\Gamma, x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$, en ajoutant au besoin des typages $x_i : F_i$ qui manqueraient. Alors on peut dériver $\Gamma \vdash \lambda x_1, \ldots, x_n \cdot hu_1 \ldots u_m : F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow F_0$.

3. Supposons que $\Gamma \vdash u[x := v] : F$ est dérivable dans le système de la figure 3, et que v est typable dans le contexte Γ. Autrement dit, $\Gamma \vdash v : G$ est dérivable pour un certain type G. De plus, on suppose que x n'est pas typée par Γ (pas de typage $x : H$ dans Γ). Pourquoi, intuitivement, $\Gamma \vdash (\lambda x \cdot u)v : F$ est-il aussi dérivable ? (On distinguera les cas où x est libre ou non libre dans u. On demande un argument de preuve convaincant, sans détailler toutes les récurrences nécessaires.) Pourquoi ce résultat n'était-il pas vrai dans le cas des types simples (sans $\cap$) ?

   Soit π une dérivation fixée de $\Gamma \vdash u[x := v] : F$. Si x n'est pas libre dans u, alors on a $\Gamma \vdash u : F$, donc $\Gamma, x : G \vdash u : F$ par affaiblissement (qui est une règle admissible, comme dans le cas des types simples, partie III du cours), donc $\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : G \Rightarrow F$, d'où $\Gamma \vdash (\lambda x \cdot u)v : F$. Ici on a besoin de $\Gamma \vdash v : G$.

   Si x est libre dans u, alors collectionnons tous les jugements de la forme $\Gamma, \Delta_i \vdash v : G_i$ dans π, $1 \leq i \leq n$. Notons que comme x est libre dans u, il y en a au moins un. Comme v est typable dans le contexte Γ, ses variables libres sont toutes dans Γ, et on peut donc raffiner ces jugements en $\Gamma \vdash v : G_i$, $1 \leq i \leq n$. Posons $G' \hat{=} \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Alors $\Gamma \vdash v : G'$. De plus, comme tous les jugements $\Gamma, \Delta_i, x : G' \vdash x : G_i$ sont dérivables par (Ax), $(\cap E_1)$ et $(\cap E_2)$, on peut transformer la dérivation π en une dérivation de $\Gamma, x : G' \vdash u : F$, en ajoutant $x : G'$ à gauche de tous les jugements, et en remplaçant les sous-dérivations de $\Gamma, \Delta_i \vdash v : G_i$ par les dérivations sus-mentionnées de $\Gamma, \Delta_i, x : G' \vdash x : G_i$. En résumé, on a pu dériver $\Gamma, x : G' \vdash u : F$ et $\Gamma \vdash v : G'$. Donc on peut dériver $\Gamma \vdash (\lambda x \cdot u)v : F$.

   Ceci ne fonctionne pas dans les types simples car, dans le deuxième cas, on ne peut pas en général prendre la conjonction de tous les types G_i qu'avait un même terme v dans le typage de u. Par exemple, si $u \hat{=} xx$ et $v \hat{=} \lambda y \cdot y$, alors on a $\vdash u[x := v] : F \Rightarrow F$, mais v apparaît une fois de type $F \Rightarrow F$ et une fois de type $(F \Rightarrow F) \Rightarrow (F \Rightarrow F)$. Et en fait $(\lambda x \cdot u)v$ n'est pas typable dans les types simples, puisque xx ne l'est pas.

4. Déduire des questions précédentes que tout λ-terme (non typé) fortement normalisant est nécessairement typable dans le système de la figure 3. (On admettra que, sur l'ensemble SN des termes fortement normalisants, $(\rhd \cup \to)^+$ est bon, où $\rhd$ est l'ordre de sous-terme strict.)

   Soit u fortement normalisant. On peut donc raisonner par récurrence sur $(\rhd \cup \to)^+$. Si u est normal, il est typable par la question 2. Sinon, u contient un rédex : écrivons u sous la forme $\mathcal{C}[(\lambda x \cdot u_1)v_1]$, qui se réduit en $u' \hat{=} \mathcal{C}[u_1[x := v_1]]$. Par hypothèse de récurrence, on peut dériver des jugements de la forme $\Gamma \vdash u_1[x := v_1] : F$ et $\Gamma \vdash v_1 : G$. Donc par la question précédente $\Gamma \vdash (\lambda x \cdot u_1)v_1 : F$. Une récurrence aisée sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire sur la profondeur du rédex contracté dans u, montre que u est donc typable.

   Ceci est un résultat remarquable : en λ-calcul, les deux propriétés suivantes sont effectivement équivalentes :

   (a) u est fortement normalisant;

   (b) u est typable dans le système $\mathcal{D}$.

5. En déduire que si u est un λ-terme (non typé) fortement normalisant, alors le $\lambda\upsilon$-terme $u^\bullet(\ell)$, où ℓ contient toutes les variables libres de u, est fortement normalisant aussi (préservation de la normalisation forte).

   Si u est fortement normalisant, alors par la question précédente il est typable dans le système $\mathcal{D}$. Par l'hypothèse (c), $u^\bullet(\ell)$ est typable dans le système de la figure 2, donc il est fortement normalisant par les résultats de la partie I.