Le $\lambda\upsilon$-calcul.

Documents autorisés (en particulier le poly).

Le but de ce problème est d'étudier le $\lambda\upsilon$-calcul, un λ-calcul à substitutions explicites proposé par J. Rouyer-Degli et P. Lescanne en 1994.

Comme dans le $\lambda\sigma$-calcul, les *expressions* du $\lambda\upsilon$-calcul sont ceux définis par la grammaire :

$$
\begin{array}{rcll}
 & & & \text{Termes} \\
M, N, P, \ldots & ::= & x & \text{Variables} \\
 & | & 1 & \text{Indice de de Bruijn 1} \\
 & | & MM & \text{Applications} \\
 & | & \lambda M & \text{Abstractions} \\
 & | & M[S] & \text{Application de substitution} \\
 & & & \text{Piles (substitutions explicites)} \\
S & ::= & \uparrow & \text{Shift} \\
 & | & \Uparrow S & \text{Lift} \\
 & | & M/ & \text{Slash}
\end{array}
$$

Les changements par rapport au $\lambda\sigma$-calcul sont : 1. on a un opérateur explicite $\Uparrow$, et $\Uparrow S$ correspond à la pile $1 \cdot (S \circ \uparrow)$ du $\lambda\sigma$-calcul; 2. on a un nouvel opérateur de pile $/$, et $M/$ correspond à la pile $M \cdot id$ du $\lambda\sigma$-calcul; 3. on n'a pas les constructions $M \cdot S$ et $S \circ S'$ du $\lambda\sigma$-calcul. De plus, on n'a pas de variable de pile.

La traduction d'un λ-terme u en un $\lambda\upsilon$-term $u^\bullet(\ell)$ (dans le contexte de la liste de variables ℓ) est définie comme suit. Pour tout entier $n \geq 1$, on note aussi n le terme $1\,\underbrace{[\uparrow][\uparrow]\ldots[\uparrow]}_{n-1 \text{ fois}}$.

$$
\begin{array}{rcll}
x^\bullet(\ell) & \hat{=} & i & \text{si } i \text{ est le premier entier tel que } x = \ell(i) \\
 & & x\,\underbrace{[\uparrow][\uparrow]\ldots[\uparrow]}_{n \text{ fois}} & \text{si } x \text{ n'est pas dans } \ell,\ n \text{ est la longueur de } \ell \\
(uv)^\bullet(\ell) & \hat{=} & u^\bullet(\ell)v^\bullet(\ell) & \\
(\lambda x \cdot u)^\bullet(\ell) & \hat{=} & \lambda(u^\bullet(x :: \ell)) &
\end{array}
$$

(On rappelle que la liste ℓ de longueur n est la suite $\ell(1), \ell(2), \ldots, \ell(n)$.)

(β)	$(\lambda M)N \to M[N/]$		
$(Var/)$	$1[M/] \to M$	$(Var \Uparrow)$	$1[\Uparrow S] \to 1$
$(\uparrow /)$	$(n+1)[N/] \to n$	$(\uparrow\Uparrow)$	$(n+1)[\Uparrow S] \to n[S][\uparrow]$
(App)	$(MN)[S] \to M[S](N[S])$	(Lam)	$(\lambda M)[S] \to \lambda(M[\Uparrow S])$

Figure 1: Les règles de réduction de $\lambda\upsilon$ ($n \geq 1$)

Les règles de réduction du $\lambda\upsilon$-calcul sont données en figure 1. Le système formé de toutes les règles sauf (β) s'appelle υ.

I. Le système $\mathcal{D}$ pour $\lambda\upsilon$

Le système de types $\mathcal{D}$ a pour types :

$$F ::= b | F \Rightarrow F | F \cap F$$

où b parcourt un ensemble fixé de types de base. Intuitivement, la signification de $\cap$ est qu'un terme de type $F \cap G$ est un terme qui est à la fois de type F et de type G.

Les règles de typage du système $\mathcal{D}$ sont données en figure 2. Dans la suite, on admettra la propriété d'autoréduction : si $\Gamma \vdash M : F$ et $M \to N$ alors $\Gamma \vdash N : F$. On se propose de démontrer par une méthode de réductibilité adaptée que les $\lambda\upsilon$-termes typés dans le système $\mathcal{D}$ sont fortement normalisants.

$$\frac{}{F_1, \ldots, F_n \vdash 1 : F_1}\ (1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash N : F}{\Gamma \vdash MN : G}\ (App) \qquad \frac{F, \Gamma \vdash M : G}{\Gamma \vdash \lambda M : F \Rightarrow G}\ (\lambda)$$

$$\frac{\Delta \vdash M : F \quad \Gamma \vdash S : \Delta}{\Gamma \vdash M[S] : F}\ ([]) \qquad \frac{}{F, \Gamma \vdash \uparrow : \Gamma}\ (\uparrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : F}{\Gamma \vdash M/ : F, \Gamma}\ (/) \qquad \frac{\Gamma \vdash S : \Delta}{F, \Gamma \vdash \Uparrow S : F, \Delta}\ (\Uparrow)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : F \quad \Gamma \vdash M : G}{\Gamma \vdash M : F \cap G}\ (\cap I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : F \cap G}{\Gamma \vdash M : F}\ (\cap E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash M : F \cap G}{\Gamma \vdash M : G}\ (\cap E_2)$$

Figure 2: Le système $\mathcal{D}$ des types intersection pour $\lambda\upsilon$

Soit SN l'ensemble des $\lambda\upsilon$-termes fortement normalisants, $RED_b \hat{=} SN$ pour tout type de base b, $RED_{F \cap G} \hat{=} RED_F \cap RED_G$, et $RED_{F \Rightarrow G}$ est l'ensemble des $\lambda\upsilon$-termes $M \in SN$ tels que, pour tout M_1 tel que $M \to^* \lambda M_1$, pour tout $N \in RED_F$, $M_1[N/] \in RED_G$.

1. Montrer les propriétés :

   (CR1) si $M \in RED_F$ alors $M \in SN$.

   (CR2) Si $M \in RED_F$ et $M \to M'$, alors $M' \in RED_F$.

   (CR3) Si M est neutre (pas de la forme λM_1), et pour tout M' tel que $M \to M'$, $M' \in RED_F$, alors $M \in RED_F$.

2. Montrer que si $M \in RED_{F \Rightarrow G}$ et $N \in RED_F$, alors $MN \in RED_G$.

3. Montrer que toute pile S est soit de la forme $\Uparrow^p (\uparrow)$ soit de la forme $\Uparrow^p (N/)$, $p \geq 0$. Dans la suite, on exploitera ce fait en décrivant les $\lambda\upsilon$-termes sous forme de la (pseudo-)grammaire :

$$M ::= 1 \mid MM \mid \lambda M \mid M[\Uparrow^p (\uparrow)] \mid M[\Uparrow^p (M/)]$$

4. Une *suite de piles* σ est une liste $[S_1][S_2]\ldots[S_k]$, où $S_1, \ldots, S_k$ sont des piles. On note ϵ pour la suite vide, et $M\sigma$ pour $M[S_1][S_2]\ldots[S_k]$.

   On dit que σ est réductible de type $\Gamma \vdash \Lambda$, en abrégé $\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Lambda}$, si et seulement le jugement $\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Lambda}$ est déductible dans le système :

$$\frac{}{\epsilon \in RED_{\Gamma \vdash \Gamma}}\ (\epsilon RED) \quad \frac{\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Xi, G, \Delta}}{[\Uparrow^p (\uparrow)]\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Xi, \Delta}}\ (\uparrow RED) \quad \frac{\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Xi, \Delta} \quad N[\uparrow]^p \sigma \in RED_G}{[\Uparrow^p (N/)]\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Xi, G, \Delta}}\ (/RED)$$

   où Ξ est de longueur p. La stratégie que l'on va employer pour montrer la normalisation forte va être de montrer que si $\Delta \vdash M : F$ est dérivable, alors pour tout $\sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Delta}$, $M\sigma \in RED_F$. (On pourra comparer avec la méthode du cours pour le λ-calcul typé, où l'on montre que $M[x_1 := N_1, \ldots, x_n := N_n] \in RED_F$ pour tous $N_1 \in RED_{F_1}, \ldots, N_n \in RED_{F_n}$, et $\Gamma = x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n$.)

On définit la *liste d'arguments* $args(\sigma)$ de σ par : $args(\epsilon) \hat{=} \epsilon$, $args(\sigma[\Uparrow^p (\uparrow)]) \hat{=} args(\sigma)$, et $args(\sigma[\Uparrow^p (N/)]) \hat{=} args(\sigma), N$. On ordonne les listes d'arguments par l'extension lexicographique $\rightarrow_{lex}$: $N_1, \ldots, N_m \rightarrow_{lex} N'_1, \ldots, N'_n$ si et seulement si $m > n$, ou $m = n$ et $N_1 \rightarrow N'_1$, ou $m = n$, $N_1 = N'_1$ et $N_2 \rightarrow N'_2, \ldots$, ou $m = n$, $N_1 = N'_1, \ldots, N_{m-1} = N'_{m-1}$ et $N_m \rightarrow N'_m$.

Pourquoi $\rightarrow_{lex}$ est-il bon (pas de chaîne infinie décroissante) sur les suites de piles dans RED_Γ ?

5. Montrer que pour tout $\sigma \in RED_{\Gamma \vdash F, \Delta}$, $1\sigma \in RED_F$. (Indication : utiliser (CR3) et effectuer une récurrence sur une mesure entière bien choisie de σ.)

6. Posons $|\Delta \vdash F| \hat{=} \{M | \forall \Gamma \cdot \forall \sigma \in RED_{\Gamma \vdash \Delta} \cdot M\sigma \in RED_F\}$. Montrer que, pour toutes listes Ξ et Λ de formules, où Ξ est de longueur p :

   (a) si $M \in |\Xi, \Lambda \vdash F|$ alors $M[\Uparrow^p (\uparrow)] \in |\Xi, G, \Lambda \vdash F|$;

   (b) si $M \in |\Xi, G, \Lambda \vdash F|$ et $N \in |\Lambda \vdash G|$, alors $M[\Uparrow^p (N/)] \in |\Xi, \Lambda \vdash F|$.

7. On admettra d'une part que si $M \in |\Gamma \vdash F \Rightarrow G|$ et $N \in |\Gamma \vdash F|$, alors $MN \in |\Gamma \vdash G|$, d'autre part que si $M \in |F, \Gamma \vdash G|$ alors $\lambda M \in |\Gamma \vdash F \Rightarrow G|$. Déduire de ces remarques et des questions précédentes que si $\Gamma \vdash M : F$ est déductible, alors $M \in |\Gamma \vdash F|$.

8. En conclure que tout $\lambda\upsilon$-terme typé dans le système $\mathcal{D}$ est fortement normalisant.

$$\frac{}{\Gamma, x : F \vdash x : F}\ (Ax)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \Rightarrow G \quad \Gamma \vdash v : F}{\Gamma \vdash uv : G}\ (App) \qquad \frac{\Gamma, x : F \vdash u : G}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot u : F \Rightarrow G}\ (\lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : F \quad \Gamma \vdash u : G}{\Gamma \vdash u : F \cap G}\ (\cap I) \qquad \frac{\Gamma \vdash u : F \cap G}{\Gamma \vdash u : F}\ (\cap E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash u : F \cap G}{\Gamma \vdash u : G}\ (\cap E_2)$$

Figure 3: Le système $\mathcal{D}$ des types intersection pour le λ-calcul

II. Le système $\mathcal{D}$ pour le λ-calcul, préservation de la normalisation forte

Le système $\mathcal{D}$ pour le λ-calcul est défini dans la figure 3. Noter que, alors que les contextes Γ de la figure 2 étaient des listes de formules, ici les contextes Γ sont des ensembles finis de liaisons $x : F$, sans variable répétée. On admettra, sans les démontrer, les propriétés :

(a) Si $u \rightarrow v$ en λ-calcul, alors $u^\bullet(\ell) \rightarrow^+ v^\bullet(\ell)$ en $\lambda\upsilon$ (similaire au théorème 3, p. 15 de la partie III du cours).

(b) Si $\Gamma \vdash u : F$ est dérivable dans le système de la figure 3, et $u \rightarrow v$, alors $\Gamma \vdash v : F$ est dérivable dans le système de la figure 3 (auto-réduction).

(c) Si $x_1 : F_1, \ldots, x_n : F_n \vdash u : F$ est dérivable dans le système de la figure 3, alors $F_1, \ldots, F_n \vdash u^\bullet(x_1, \ldots, x_n) : F$ est dérivable dans le système de la figure 2.

1. Déduire de la partie I que tous les λ-termes typés dans le système $\mathcal{D}$ (figure 3) sont fortement normalisants.

2. Étant donnés deux contextes Γ et Δ, on note $\Gamma \cap \Delta$ le contexte qui donne à toute variable x le type $F \cap G$, si $x : F \in \Gamma$ et $x : G \in \Delta$; le type F si $x : F \in \Gamma$ mais x n'apparaît pas dans Δ; le type G si $x : G \in \Delta$ mais x n'apparaît pas dans Γ.

   On rappelle qu'un λ-terme u en forme normale est de la forme $\lambda x_1, \ldots, x_n \cdot h u_1 \ldots u_m$, où h est une variable et $u_1, \ldots, u_n$ sont eux-mêmes normaux. Montrer que tout λ-terme normal est typable dans le système de la figure 3. Plus précisément, on montrera que tout terme normal $\lambda x_1, \ldots, x_n \cdot h u_1 \ldots u_m$ est typable d'un certain type $F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow F_0$, dans un certain contexte Γ, où F_0 est un type fixé quelconque.

3. Supposons que $\Gamma \vdash u[x := v] : F$ est dérivable dans le système de la figure 3, et que v est typable dans le contexte Γ. Autrement dit, $\Gamma \vdash v : G$ est dérivable pour un certain type G. De plus, on suppose que x n'est pas typée par Γ (pas de typage $x : H$ dans Γ). Pourquoi, intuitivement, $\Gamma \vdash (\lambda x \cdot u)v : F$ est-il aussi dérivable ? (On distinguera les cas où x est libre ou non libre dans u. On demande un argument de preuve convaincant, sans détailler toutes les récurrences nécessaires.) Pourquoi ce résultat n'était-il pas vrai dans le cas des types simples (sans $\cap$) ?

4. Déduire des questions précédentes que tout λ-terme (non typé) fortement normalisant est nécessairement typable dans le système de la figure 3. (On admettra que, sur l'ensemble SN des termes fortement normalisants, $(\triangleright \cup \rightarrow)^+$ est bon, où $\triangleright$ est l'ordre de sous-terme strict.)

5. En déduire que si u est un λ-terme (non typé) fortement normalisant, alors le $\lambda\upsilon$-terme $u^\bullet(\ell)$, où ℓ contient toutes les variables libres de u, est fortement normalisant aussi (préservation de la normalisation forte).