Une démonstration de la complétude de **LK**

Jean Goubault-Larrecq

April 6, 1999

Nous allons donner une démonstration relativement courte de la complétude de **LK**. Les points essentiels seront décrits en section 1, mais la tentative de preuve qui y est décrite est erronée. Nous analyserons pourquoi, et réparerons la preuve en section 2.

Nous montrerons ensuite que la méthode des tableaux à variables libres avec règle δ^{++} est complète en section 3. Le résultat sera beaucoup plus fort, et montrera non seulement la complétude, mais encore qu'on n'a jamais besoin de coupure, ni de contraction (sauf sur les règles γ), et que n'importe quelle stratégie d'expansion de tableaux est complète du moment qu'elle est équitable.

1 Une tentative presque réussie

Nous pouvons voir tout séquent $F_1, \ldots, F_m \longrightarrow G_1, \ldots, G_n$ comme un ensemble $-F_1, \ldots, -F_m, +G_1, \ldots, +G_n$ de formules signées (une *branche* de tableaux). Nous dirons qu'une branche $-F_1, \ldots, -F_m, +G_1, \ldots, +G_n$ est *cohérente* si et seulement si le séquent correspondant $F_1, \ldots, F_m \longrightarrow G_1, \ldots, G_n$ est improuvable. Ceci signifie que l'on peut supposer que toutes les formules négatives sont vraies et toutes les formules positives sont fausses, sans que le système de déduction puisse en déduire le faux (le séquent vide).

En général, nous allons considérer des branches B infinies. Nous dirons alors que B est cohérente si et seulement si toute sous-branche finie est cohérente.

Nous observons d'abord que :

Lemme 1 *Pour toute branche cohérente B, il existe une branche cohérente maximale B_∞ contenant B.*

Preuve : C'est une application du lemme de Zorn (une variante de l'axiome du choix) : tout ensemble ordonné inductif a un élément maximal. Rappelons qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit inductif si et seulement si toute famille totalement ordonnée $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E a un majorant. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est totalement ordonnée si et seulement si pour tous $i, j \in I$, $x_i \leq x_j$ ou $x_j \leq x_i$. Un élément maximal d'un ensemble est un élément de l'ensemble qui est $\geq$ à tous les éléments de l'ensemble.

Considérons l'ensemble E de toutes les branches cohérentes contenant B, ordonné par l'inclusion. Si $(B_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de E, considérons $B' = \bigcup_{i \in I} B_i$. B' est clairement un majorant des B_i, et nous prétendons que B' est dans E, c'est-à-dire que toute sous-branche finie B'' de B' est cohérente. Or B'' étant finie, est incluse dans une union finie des B_i et donc dans l'un des B_i, puisque la famille est totalement ordonnée. Mais B_i étant cohérente, et B'' étant une sous-branche de B_i, B'' est nécessairement cohérente. Comme B'' est une sous-branche arbitraire de B', B' est cohérente. Il ne reste qu'à appliquer le lemme de Zorn, et à choisir pour B_∞ un élément maximal quelconque de E. $\square$

Les branches cohérentes maximales ont des propriétés remarquables :

Lemme 2 *Pour toute branche cohérente maximale B, pour toute formule F, soit $+F$ soit $-F$ est dans B.*

Preuve : Clairement, $+F$ et $-F$ ne peuvent pas être toutes les deux dans B, sinon B ne serait pas cohérente. Réciproquement, supposons que ni $+F$ ni $-F$ ne soit dans B. Comme B est maximale, ceci signifie que $B \cup \{+F\}$ et $B \cup \{-F\}$ sont toutes les deux incohérentes. Donc il existe des sous-ensembles finis B_1 et B_2 de $B \cup \{+F\}$ et $B \cup \{-F\}$ respectivement, qui, vus comme des séquents, sont prouvables. On peut sans perte de généralité supposer que $+F \in B_1$ et $-F \in B_2$, car l'affaiblissement est admissible en **LK**. Posons alors $B'_1 = B_1 \setminus \{+F\}$, $B'_2 = B_2 \setminus \{-F\}$. Par une application de la règle de coupure sur F, on en déduit une preuve de $B'_1 \cup B'_2$. Mais par construction B'_1 et B'_2 sont des sous-ensembles de B, donc $B'_1 \cup B'_2$ aussi : nous venons de démontrer que B était incohérent, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $+F$ ou $-F$ doit appartenir à B. □

Lemme 3 *Pour toute branche cohérente maximale B :*

1. *si α est une formule comme suit dans B, alors l'une des formules signées correspondantes α_1 ou α_2 est aussi dans S :*

α	α_1	α_2
$+(F_1 \wedge F_2)$	$+F_1$	$+F_2$
$-(F_1 \vee F_2)$	$-F_1$	$-F_2$
$-(F_1 \Rightarrow F_2)$	$+F_1$	$-F_2$
$+(\neg F_1)$	$-F_1$	
$-(\neg F_1)$	$+F_1$	

2. *si β est une formule comme suit dans B, alors les formules signées correspondantes β_1 et β_2 sont aussi dans B :*

β	β_1	β_2
$-(F_1 \wedge F_2)$	$-F_1$	$-F_2$
$+(F_1 \vee F_2)$	$+F_1$	$+F_2$
$+(F_1 \Rightarrow F_2)$	$-F_1$	$+F_2$

3. *si γ est une formule comme suit dans B, alors pour tout terme t, la formule correspondante $\gamma_1(t)$ est dans S :*

γ	$\gamma_1(t)$
$+\exists x \cdot F_1$	$+F_1[t/x]$
$-\forall x \cdot F_1$	$-F_1[t/x]$

Preuve : α : si $+(F_1 \wedge F_2)$ est dans B, mais que ni $+F_1$ ni $+F_2$ ne sont dans B, alors par le lemme 2, $-F_1$ et $-F_2$ sont dans B. Mais la sous-branche $-F_1, -F_2, +(F_1 \wedge F_2)$ est incohérente, puisqu'on a la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{}{F_1, F_2 \longrightarrow F_1}\text{Ax} \qquad \dfrac{}{F_1, F_2 \longrightarrow F_2}\text{Ax}}{F_1, F_2 \longrightarrow F_1 \wedge F_2}\wedge\text{R}$$

Ceci implique que B elle-même est incohérente, ce qui est absurde.

Les autres cas de règles α se démontrent de façon similaire, en utilisant les règles $\vee$L, $\Rightarrow$L, $\neg$R et $\neg$L respectivement.

β : de même, en utilisant les règles $\wedge$L, $\vee$R, $\Rightarrow$R.

γ : supposons que $+\exists x \cdot F_1$ soit dans B mais pas $+F_1[t/x]$, où t est un terme quelconque donné. Par le lemme 2, $-F_1[t/x]$ est dans B, mais ceci est contredit par le fait que l'on peut prouver :

$$\dfrac{\dfrac{}{F_1[t/x] \longrightarrow F_1[t/x]}\text{Ax}}{F_1[t/x] \longrightarrow \exists x \cdot F_1}\exists\text{R}$$

De même pour $-\forall x \cdot F_1$, en utilisant $\forall$L. □

Nous aimerions bien avoir aussi la propriété :

4. si δ est une formule comme suit dans B, alors il existe un terme t tel que la formule correspondante $\delta_1(t)$ soit dans B :

δ	$\delta_1(t)$
$+\forall x \cdot F_1$	$+F_1[t/x]$
$-\exists x \cdot F_1$	$-F_1[t/x]$

La preuve serait : supposons que $+\forall x \cdot F_1$ soit dans B, mais que $+F_1[t/x]$ ne soit pas dans B pour aucun terme t. En particulier, $+F_1[y/x]$ n'est pas dans B, où y est une variable non libre dans $\forall x \cdot F_1$; donc $-F_1[y/x]$ est dans B par le lemme 2. Un raisonnement (trop) rapide permettrait de contredire la cohérence de B, observant que l'on peut dériver :

$$\dfrac{\dfrac{}{F_1[y/x] \longrightarrow F_1[y/x]}\text{Ax}}{F_1[y/x] \longrightarrow \forall x \cdot F_1}\forall\text{R}$$

Mais cet argument ne fonctionne pas, parce que pour appliquer $\forall$R, il faudrait que y ne soit pas libre dans le $F_1[y/x]$ du côté gauche, ce qui est en général impossible.

Ignorons le problème pour l'instant, et définissons :

Définition 4 *Une branche B est appelée* saturée *si et seulement si elle vérifie les propriétés 1.–4.*

Lemme 5 *On dit que I, ρ* falsifie *$+F$ si et seulement si non $I, \rho \models F$; I, ρ falsifie $-F$ si et seulement si $I, \rho \models F$. I, ρ falsifie un ensemble de formules signées B si et seulement si I, ρ falsifie tous les éléments de B. On dit alors que (I, ρ) est un* contre-modèle *de B.*

Soit B une branche maximale cohérente, et supposons B saturée. Alors B a un contre-modèle.

Preuve : Définissons le comme un modèle à la Herbrand. Le domaine D de l'interprétation est l'ensemble de tous les termes, et pour chaque symbole de fonction f d'arité n, l'interprétation $I(f)$ est la fonction qui aux termes t_1, ..., t_n associe le terme $f(t_1, \ldots, t_n)$.

Pour chaque symbole de prédicat P d'arité n, posons $I(P)$ la fonction qui à t_1, ..., t_n associe vrai si et seulement si $-P(t_1, \ldots, t_n)$ est dans B. Notons que : (a) pour toute affectation ρ (qui est en même temps une substitution), pour tout terme t, $[\![t]\!]I\rho = t\rho$. C'est une récurrence facile sur t.

Soit enfin ρ l'affectation qui à toute variable x associe le terme x dans D. Notons que, pour toute formule atomique A, on a $I, \rho \models A$ si et seulement si $-A \in B$: en effet, soit $A = P(t_1, \ldots, t_n)$, alors $I, \rho \models A$ si et seulement si $-P([\![t_1]\!]I\rho, \ldots, [\![t_n]\!]I\rho) \in B$, c'est-à-dire, en utilisant (a), si et seulement si $-P(t_1, \ldots, t_n) \in B$, autrement dit si et seulement si $-A \in B$.

Nous montrons que I, ρ falsifie toute formule signée $\pm F$ de B, par récurrence structurelle sur F. Si F est une formule atomique A, c'est par construction : si $-A$ est dans B, alors par définition $I, \rho \models A$; et si $+A$ est dans B, alors non $I, \rho \models A$, car sinon $-A$ serait aussi dans B, ce qui contredirait la cohérence de B.

Si $\pm F$ est une formule α, par exemple $+(F_1 \wedge F_2)$, alors comme la branche est saturée, $+F_1$ ou $+F_2$ est aussi dans B, donc par hypothèse de récurrence I, ρ falsifie $+F_1$ ou $+F_2$. Dans chaque cas, I, ρ doit donc falsifier $+(F_1 \wedge F_2)$. Le raisonnement est similaire dans le cas des autres formules α, ainsi que pour les formules β.

Si $\pm F$ est une formule γ, par exemple $+\exists x \cdot F_1$, alors parce que la branche est saturée, pour tout terme t, $+F_1[t/x]$ est dans B. Par hypothèse de récurrence, I, ρ falsifie $+F_1[t/x]$; mais si on avait $I, \rho \models \exists x \cdot F_1$, alors il existerait une valeur pour x rendant F_1 vraie dans I, ρ. Une telle valeur est par définition un terme t, et donc on aurait $I, \rho \models F_1[t/x]$, ce qui est impossible. Donc I, ρ falsifie $+\exists x \cdot F_1$. Le cas de $-\forall x \cdot F_1$ est similaire.

Si $\pm F$ est une formule δ, par exemple $+\forall x \cdot F_1$, alors puisque la branche est saturée, il existe un terme t tel que $+F_1[t/x]$ soit dans B. Par hypothèse de récurrence, I, ρ falsifie $F_1[t/x]$; mais si on avait $I, \rho \models \forall x \cdot F_1$, alors en particulier $I, \rho[t/x] \models F_1$, et donc $I, \rho \models F_1[t/x]$. Donc I, ρ falsifie $+\forall x \cdot F_1$. Le cas de $-\exists x \cdot F_1$ est similaire. □

Nous en déduisons immédiatement :

Théorème 6 *Supposons que toute branche cohérente finie B soit incluse dans une branche cohérente maximale B_∞ qui est saturée.*

Alors **LK** *est complet : tout séquent valide est prouvable.*

Preuve : Soit B un séquent, vu comme une branche finie, et supposons par l'absurde que B ne soit pas prouvable, autrement dit que B soit cohérente. Par hypothèse, il existe une branche cohérente maximale B_∞ contenant B, et qui est saturée. Par le lemme 5, B_∞ a un contre-modèle, donc B aussi, ce qui contredit la validité de B. □

Mais comme toute branche cohérente maximale n'est pas nécessairement saturée (la propriété 4. peut échouer), la construction d'une branche B_∞ comme au lemme 1 ne suffit pas pour garantir que B_∞ soit saturée.

2 La preuve réparée

Nous devons donc être plus fins, et remplacer la construction du lemme 1 par une construction plus précise, qui assure en plus que B_∞ vérifie la propriété 4.

Lemme 7 *Pour toute branche cohérente finie B, il existe une branche cohérente maximale B_∞ contenant B, et qui soit de plus saturée.*

Preuve : La construction du lemme 1 consiste grosso modo à ajouter des formules signées à B de sorte à préserver la cohérence, et ce jusqu'à ce que pour toute formule F, soit $+F$ soit $-F$ ait été rajoutée. L'idée ici va être que, dès que l'on souhaite ajouter une formule δ à B, on va aussi lui ajouter $\delta_1(y)$, où y est une variable fraîche.

Notons que : (a) pour toute branche finie cohérente B' contenant δ, alors $B' \cup \{\delta_1(y)\}$ est encore une branche finie cohérente, pour toute variable y non libre dans B'. Considérons le cas où B' contient δ de la forme $+\forall x \cdot F_1$, et montrons que $B' \cup \{+F_1[y/x]\}$ est encore cohérente. En effet, supposons le contraire, écrivons B' sous la forme $B'' \cup \{+\forall x \cdot F_1\}$, et B'' sous forme de séquent comme $\Gamma \longrightarrow \Delta$. Si $B' \cup \{+F_1[y/x]\}$ n'était pas cohérente, nous aurions par définition une preuve de $\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x \cdot F_1, F_1[y/x]$. Comme y n'est pas libre dans B', nous pouvons donc appliquer la règle $(\forall R)$ et en déduire $\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x \cdot F_1, \forall x \cdot F_1$, c'est-à-dire B'; mais ceci contredit la cohérence de B'. (Le cas ou δ est de la forme $-\exists x \cdot F_1$ est symétrique, et utilise la règle $\exists$L.)

Nous construisons maintenant une suite croissante de branches finies cohérentes B_n contenant B comme suit. Fixons une énumération $\pm F_1, \pm F_2, \ldots, \pm F_n, \ldots$, de toutes les formules signées. Nous construisons B_n par récurrence sur n comme suit. Pour $n = 0$, posons $B_n = B$. Si $n \geq 1$, et si $B_{n-1} \cup \{\pm F_n\}$ est incohérente, alors soit $B_n = B_{n-1}$. Si $n \geq 1$, et si $B_{n-1} \cup \{\pm F_n\}$ est cohérente, alors de deux choses l'une : ou bien $\pm F_n$ est une formule de la forme δ, et l'on pose alors $B_n = B_{n-1} \cup \{\delta, \delta_1(y)\}$, où y est une variable quelconque non libre dans $B_{n-1} \cup \{\delta\}$ (B_n est alors bien finie et cohérente, par (a)); ou bien $\pm F_n$ n'est pas une formule de la forme δ, et l'on pose alors $B_n = B_{n-1} \cup \{\pm F_n\}$.

Posons $B_\infty = \bigcup_{n \geq 0} B_n$. B_∞ contient B_0, donc B. De plus, B_∞ est cohérente : sinon, B_∞ contiendrait une sous-branche finie prouvable, et cette branche serait incluse dans un B_n pour n assez grand, ce qui contredirait la cohérence de B_n. B_∞ est maximale : supposons que non, alors il existerait une formule signée $\pm F_n$ ($n \geq 1$) en-dehors de B_∞ telle que $B_\infty \cup \{\pm F_n\}$ soit cohérente; mais comme $\pm F_n$ n'est pas dans B_∞, en particulier $\pm F_n$ n'est pas dans B_n, donc par construction de B_n, $B_{n-1} \cup \{\pm F_n\}$ doit être incohérente, donc prouvable (en tant que séquent); mais ceci contredit la cohérence de $B_\infty \cup \{\pm F_n\}$. Finalement, B_∞ est saturée. En effet, il suffit de vérifier 4., puisque 1.–3. sont des conséquences du fait que B_∞ est cohérente maximale, par le lemme 2. Or, pour toute formule δ dans B_∞, δ s'écrit $\pm F_n$ pour un (unique) $n \geq 1$. Comme δ est dans B_∞, $B_\infty \cup \{\pm F_n\}$ est cohérente, donc $B_{n-1} \cup \{\pm F_n\}$ (qui est un sous-ensemble fini du précédent) est cohérent. Mais par construction, on a alors $B_n = B_{n-1} \cup \{\pm F_n, \delta_1(y)\}$ pour une certaine variable y, et donc $\delta_1(y) \in B_n$, d'où $\delta_1(y) \in B_\infty$: B_∞ est bien saturée. $\square$

La preuve est maintenant réparée :

Théorème 8 **LK** *est complet : tout séquent valide est prouvable.*

Preuve : Par le théorème 6 et le lemme 7. $\square$

3 Complétude de la méthode des tableaux

Nous allons maintenant être beaucoup plus ambitieux, et montrer que la méthode des tableaux à variables libres avec règle δ^{++} est complète. Le résultat sera beaucoup plus fort que la complétude de **LK**, et montrera non seulement la complétude, mais encore qu'on n'a jamais besoin de coupure, ni de contraction (sauf sur les règles γ), et que n'importe quelle stratégie d'expansion de tableaux est complète du moment qu'elle est équitable. Mais beaucoup de techniques de preuve ressembleront à ceux développés pour la complétude de **LK**.

Comme nous voulons contrôler l'usage de la contraction, nous allons considérer dorénavant les branches comme des *multi-ensembles* de formules signées. Les règles d'expansion de tableaux sont :

(α) toute branche $B \cup \{\alpha\}$ peut s'expanser en deux branches $B \cup \{\alpha_1\}$ et $B \cup \{\alpha_2\}$;

(β) toute branche $B \cup \{\beta\}$ peut s'expanser en une branche $B \cup \{\beta_1, \beta_2\}$;

(γ) toute branche $B \cup \{\gamma\}$ peut s'expanser en une branche $B \cup \{\gamma, \gamma_1(y)\}$, où y est une variable fraîche (n'apparaissant ni dans B, ni dans γ, ni dans les autres branches);

(δ) toute branche $B \cup \{\delta\}$ peut s'expanser en une branche $B \cup \{\delta_1(f(x_1, \ldots, x_n))\}$, où f est un symbole unique associé à la formule δ (sémantiquement, c'est $\lambda x_1, \ldots, x_n \cdot \epsilon x \cdot F_1$ si $\delta = -\forall x \cdot F_1$ par exemple, autrement dit c'est un contre-exemple canonique à F) et $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de δ.

Ensuite, nous voulons pouvoir repérer des occurrences de formules dans les branches. Pour ceci, nous étiquetons les formules signées (certaines, au moins) par des entiers (ou n'importe quel autre moyen d'étiquetage) : notons $\pm F^i$ la formule signée $\pm F$ étiquetée par i. Une *stratégie* consistera à choisir une formule étiquetée dans la branche. Les règles d'expansion deviennent : si B_1 ne contient que des formules non étiquetées, alors B_1 ne s'expanse pas; sinon, la stratégie choisit une des formules étiquetées $\pm F^i$ de B_1 : soit $B = B_1 \setminus \{\pm F^i\}$. Si F est atomique, alors enlever l'étiquette, autrement dit B_1 s'expanse en $B \cup \{\pm F\}$. Sinon, $B \cup \{\alpha^i\}$ s'expanse en $B \cup \{\alpha_1^j\}$ et en $B \cup \{\alpha_2^k\}$, où j et k sont deux nouvelles étiquettes; $B \cup \{\beta^i\}$ s'expanse en $B \cup \{\beta_1^j, \beta_2^k\}$, où j et k sont deux nouvelles étiquettes; $B \cup \{\gamma^i\}$ s'expanse en $B \cup \{\gamma^j, \gamma_1(y)^k\}$, où y est une variable fraîche, et j et k sont deux nouvelles étiquettes (noter qu'on *remplace* l'occurrence i de γ pour une nouvelle occurrence j); $B \cup \{\delta^i\}$ s'expanse en une branche $B \cup \{\delta_1(f(x_1, \ldots, x_n))^j\}$ comme plus haut, avec j une nouvelle étiquette.

Nous supposerons qu'il n'y a jamais deux formules avec la même étiquette sur la même branche. De plus, nous supposerons que la stratégie choisi la formule étiquetée sur la branche sans regarder le contenu des formules, par exemple, on choisissant toujours la formule de plus petite étiquette (en général, ce qu'on voudra, c'est que si la stratégie choisit $\pm F^i$ dans B, alors elle choisit aussi $\pm F^i\sigma$ dans l'instance $B\sigma$ de B). Finalement, nous supposerons que la stratégie est *équitable*, ce qui signifie que, quelle que soit la suite de branches $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$, telle que tout B_{n+1} est obtenu par expansion à partir de B_n, pour toute formule étiquetée $\pm F^i$ dans B_n, il existe $p \geq n$ telle que la stratégie sélectionne $\pm F^i$ dans B_p.

Supposons maintenant que B est une branche close improuvable par la méthode des tableaux utilisant une stratégie équitable donnée. Nous pouvons alors construire une suite de branches closes improuvables $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$, comme suit. L'idée est que nous allons suivre la procédure des tableaux, en choisissant toujours une expansion de la branche courante qui n'a aucun tableau clos. Ceci va nous donner une suite de branches $B'_0, B'_1, \ldots, B'_n, \ldots$, et nous allons construire chaque B_n comme une instance close $B'_n\sigma_n$ de B'_n. Avant de commencer, soit $t_1, t_2, \ldots, t_p, \ldots$, une énumération de tous les termes clos.

D'abord, $B'_0 = B_0 = B$, σ_0 est la substitution vide. Ensuite, si B'_n, B_n, σ_n ont été construits, soit B_n ne contient que des formules non étiquetées, et la suite s'arrête ici, soit la stratégie choisit une des formules étiquetées $\pm F^i$ de B'_n : soit $B = B'_n \setminus \{\pm F^i\}$. Alors, en reprenant les notations déjà utilisées plus haut :

- si F est atomique, alors $B'_{n+1} = B \cup \{\pm F\}$, $\sigma_{n+1} = \sigma_n$;
- si F est de type α, alors $(B \cup \{\alpha_1^j\})\sigma_n$ ou $(B \cup \{\alpha_2^k\})\sigma_n$ est improuvable : dans le premier cas, posons $B_{n+1} = B \cup \{\alpha_1^j\}$, sinon posons $B_{n+1} = B \cup \{\alpha_2^k\}$; dans tous les cas, nous posons $\sigma_{n+1} = \sigma_n$;
- si F est de type β, alors $B_{n+1} = B \cup \{\beta_1^j, \beta_2^k\}$, $\sigma_{n+1} = \sigma_n$;
- si F est de type γ, alors $(B \cup \{\gamma^j, \gamma_1(y)^k\})\sigma_n$ n'a aucun tableau que l'on puisse clore. En particulier, $(B \cup \{\gamma^j, \gamma_1(y)^k\})(\sigma_n \cup [t/y])$ est improuvable pour tout terme clos t. Soit t_p le premier terme clos dans l'énumération qu'on s'est fixée tel que $\gamma_1(y)(\sigma_n \cup [t_p/y])$ n'apparaisse pas (avec quelqu'étiquette que ce soit) dans B_n, et posons $B'_{n+1} = B \cup \{\gamma^j, \gamma_1(y)^k\}$, $\sigma_{n+1} = \sigma_n \cup [t_p/y]$;
- si F est de type δ, alors soit $B'_{n+1} = B'_n \cup \{\delta_1(f(x_1, \ldots, x_n))\}$, et $\sigma_{n+1} = \sigma_n$.

Lemme 9 *Supposons que toutes les formules de B_0 sont étiquetées. Alors l'ensemble B_∞ des formules signées apparaissant étiquetées ou non dans $\bigcup_{n\geq 0} B_n$ est saturé. On dira qu'un ensemble de formules signées est* saturé *si et seulement si les conditions 1.–4. sont vérifiées, en remplaçant "terme" par "terme clos" et "formule" par "formule close".*

Preuve : Par récurrence, on montre aisément que toute formule non atomique de tout B_n est étiquetée. Si on a une formule α dans B_∞, alors elle est dans un B_n. Mais comme la stratégie est équitable, cette formule finit par être choisie, disons au rang $m \geq n$, et donc α_1 ou α_2 est dans B_{m+1}, donc dans B_∞ : ceci prouve la condition 1. De même, si $\beta \in B_\infty$, alors β_1 et β_2 sont dans B_∞, ce qui montre la condition 2. La condition 4 est maintenant facile, parce que si δ est dans B_∞, alors $\delta_1(f(x_1\sigma_{m+1}, \ldots, x_n\sigma_{m+1}))$ est dans B_{m+1}, donc dans B_∞, pour m assez grand. Il ne reste qu'à montrer la condition 3. Pour ceci, soit $\gamma \in B_\infty$, nous montrons par récurrence sur p qu'il existe une branche étiquetée B_{m_p} contenant γ ainsi que $\gamma_1(t_1)$, $\ldots$, $\gamma_1(t_p)$ (chacune étant étiquetée de façon appropriée) pour tout p. Pour $p = 0$, c'est évident. Sinon, supposons B_{m_p} construite. Comme la stratégie est équitable, elle finit par expanser l'instance étiquetée de γ, disons au rang $m_{p+1} - 1$. $B_{m_{p+1}}$ contient alors une nouvelle version étiquetée de γ, ainsi que $\gamma_1(t_1)$, $\ldots$, $\gamma_1(t_p)$, plus $\gamma_1(t_{p+1})$, puisque t_{p+1} est en effet le premier terme clos de l'énumération tel que $\gamma(t_{p+1})$ n'apparaissait pas sur la branche. On en conclut que B_∞ contient tous les $\gamma_1(t_p)$, donc tous les $\gamma_1(t)$ pour tout terme clos t : la condition 4. est donc vérifiée. □

Lemme 10 *Un ensemble de formules signées est dit de* Hintikka *si et seulement s'il est saturé, et pour aucune formule atomique A, il ne contient à la fois $+A$ et $-A$.*

Sous les hypothèses du lemme 9, B_∞ est de Hintikka.

Preuve : Si on avait à la fois $+A$ et $-A$ dans B_∞, alors $+A$ serait dans un B_m et $-A$ dans un B_n (à étiquetage près). Ceci implique que B_m contiendrait un $+A'$ avec $A'\sigma_m = A$ et que B_n contiendrait un $-A''$ avec $A''\sigma_n = A$. Supposons que $n \geq m$, le cas $m \geq n$ étant symétrique. Alors σ_n est de la forme $\sigma_m \cup \sigma$, où σ est une substitution de domaine disjoint d'avec celui de σ_m, comme on peut le vérifier dans la construction. Comme A est clos, aucune variable libre de A' n'est dans le domaine de σ, donc $A = A'\sigma_n$. Il s'ensuit que, dans la branche B_n, A' et A'' sont unifiables, car σ_n est un unificateur. Mais c'est impossible, parce que B_n est improuvable. □

On peut maintenant montrer la complétude des tableaux en ajoutant à B_∞ toutes les formules atomiques qui n'y apparaissaient pas (ajouter par exemple $+A$, pour tout A tel que ni $+A$ ni $-A$ n'est dans B_∞), et en ajoutant suffisamment de formules pour que les conditions 1.–4. deviennent des équivalences. On obtient encore un ensemble de Hintikka, et la preuve du lemme 5 permet alors d'obtenir un contre-modèle de cette branche complétée, donc de B_∞, donc de B.

Une façon plus directe de faire est la suivante :

Lemme 11 (Hintikka) *Tout ensemble de Hintikka B_∞ a un contre-modèle.*

Preuve : Soit D, le domaine, égal à l'ensemble des termes clos. L'interprétation est une interprétation de Herbrand, donc telle que pour chaque symbole de fonction f d'arité n, l'interprétation $I(f)$ est la fonction qui aux termes clos $t_1, \ldots, t_n$ associe le terme clos $f(t_1, \ldots, t_n)$. Il ne reste donc qu'à spécifier quels atomes clos sont vrais dans I : ce seront les atomes A tels que $-A \in B_\infty$. (En particulier, les atomes tels que $+A \in B_\infty$ sont faux, mais aussi tous les atomes qui n'apparaissent pas dans B_∞: mettre ces derniers à faux est un choix totalement arbitraire.)

Nous allons montrer que : $(*)$ pour toute formule close F, si $-F \in B_\infty$, alors $I \models F$, et si $I \models F$, alors $+F \notin B_\infty$. Ceci se fait par récurrence sur la taille de F.

Si F, est une formule atomique A, alors $-A \in B_\infty$ implique $I \models A$ par définition. Et si $I \models A$, alors $-A \in B_\infty$ par définition, donc $+A \notin B_\infty$ parce que B_∞ est de Hintikka.

Si F est une formule de la forme $F_1 \wedge F_2$, alors $-F$ est de type β. Donc si $-F \in B_\infty$, alors $-F_1$ et $-F_2$ sont aussi dans B_∞, donc par hypothèse de récurrence $I \models F_1$ et $I \models F_2$, donc $I \models F$. Et si $I \models F$, alors $I \models F_1$ et $I \models F_2$, donc ni $+F_1$ ni $+F_2$ ne sont dans B_∞. Or si $+F$ était dans B_∞, comme $+F$ est de type α, l'une des deux formules signées $+F_1$ ou $+F_2$ serait dans B_∞. Donc $+F \notin B_\infty$.

Si F est de la forme $\neg F_1$, et si $-F \in B_\infty$, alors $+F_1 \in B_\infty$. Mais par récurrence, si $I \models F_1$ alors $+F_1 \notin B_\infty$. Donc il est faux que $I \models F_1$, donc $I \models F$. Et si $I \models F$, alors il est faux que $I \models F_1$, donc il est faux que $-F_1 \in B_\infty$, par récurrence. Mais si $+F$ était dans B_∞, $-F_1$ serait justement dans B_∞. Donc $+F$ n'est pas dans B_∞.

Les cas des autres connecteurs propositionnels sont similaires. Examinons donc maintenant les quantificateurs.

Si F est de la forme $\forall x \cdot F_1$, alors $-F$ est de type γ. Donc si $-F \in B_\infty$, pour tout terme clos t, $-F_1[t/x]$ est dans B_∞. Comme la taille de $F_1[t/x]$ est égale à celle de F_1, qui est strictement plus petite que celle de F, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence, et conclure que $I \models F_1[t/x]$, et ce pour tout terme clos t, c'est-à-dire pour toute valeur $t \in D$. Donc $I \models F$. Ensuite, si $I \models F$, alors $I \models F_1[t/x]$ pour tout terme clos t, donc $+F_1[t/x]$ n'est dans B_∞ pour aucun terme clos t. Donc $+F$, qui est de type δ, ne peut pas être dans B_∞.

Si F est de la forme $\exists x \cdot F_1$, finalement, $-F$ est de type δ. Donc si $-F \in B_\infty$, alors $-F_1[t/x] \in B_\infty$ pour au moins un terme clos t, ce qui entraîne par l'hypothèse de récurrence que $I \models F_1[t/x]$ pour au moins une valeur $t \in D$, c'est-à-dire $I \models F$. Ensuite, si $I \models F$, alors il existe un terme clos t tel que $I \models F_1[t/x]$, donc tel que $+F_1[t/x]$ ne soit pas dans B_∞, par récurrence. Mais alors F n'est pas non plus dans B_∞, car sinon tous les $+F_1[t/x]$ seraient dans B_∞.

$(*)$ étant montrée, il s'ensuit que, pour tout $-F \in B_\infty$, $I \models F$, autrement dit I falsifie $-F$, et pour tout $+F \in B_\infty$, il est faux que $I \models F$, autrement dit I falsifie $+F$. Donc I falsifie B_∞. $\square$

Théorème 12 *La méthode des tableaux à variables libres avec règle δ^{++} est complète.*

Preuve : Partons d'une branche B_0 n'ayant pas de preuve par tableaux. Par le lemme 9, B_∞ contient B_0 et est saturé. Par le lemme 10, B_∞ est un ensemble de Hintikka. Il s'ensuit que B_∞ a un contre-modèle par le lemme 11, qui est donc un contre-modèle pour B_0. $\square$

Au risque de nous répéter, rappelons que ce résultat est beaucoup plus fort que la complétude de **LK** : observer que nous n'avons jamais utilisé la coupure, ni la contraction (sauf sur les règles γ), que nous n'avons eu besoin de clore les branches que sur des formules atomiques, et que tout stratégie d'expansion de tableaux convient du moment qu'elle est équitable.

References

[Fit96] Melvin C. Fitting. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving.* Graduate Texts in Computer Science. Springer Verlag, second edition, 1996.