Conservatoire National des Arts et Métiers
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
DESS DLS : Développement de Logiciels Sûrs
2000/2001

Parrennes Fabrice
Fabrice.Parrennes@lip6.fr
http://www-spi.lip6.fr/~parrenne/Cours/DLS

Examen 2001

1 Correspondance de Galois

Rappel 1 *Soit deux ensembles partiellement ordonnés $\langle D, \subseteq\rangle$ et $\langle S, \sqsubseteq\rangle$. Une correspondance de Galois est une paire de fonctions α, γ telle que :*

- *α est monotone ;*
- *γ est monotone ;*
- *$\alpha(x) \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \subseteq \gamma(y)$.*

On note alors :

$$\langle D, \subseteq\rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle S, \sqsubseteq\rangle$$

Exercice 1 *Soit trois ensembles partiellement ordonnée $\langle L_1, \sqsubseteq_1\rangle$, $\langle L_2, \sqsubseteq_2\rangle$ et $\langle L_3, \sqsubseteq_3\rangle$. On définit deux correspondances de Galois : une entre L_1 et L_2 et l'autre entre L_2 et L_3 :*

$$\langle L_1, \sqsubseteq_1\rangle \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \langle L_2, \sqsubseteq_2\rangle \qquad \langle L_2, \sqsubseteq_2\rangle \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\leftrightarrows}} \langle L_3, \sqsubseteq_3\rangle$$

On définit deux nouvelles fonctions $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$ et $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$.
Montrer que (α, γ) forme une correspondance de Galois entre $\langle L_1, \sqsubseteq_1\rangle$ et $\langle L_3, \sqsubseteq_3\rangle$.

Correction 1 *Il faut montrer que :*

a) α monotone : Par hypothèse $\forall x, y \in L_1\ x \sqsubseteq_1 y \Rightarrow \alpha_1(x) \sqsubseteq_2 \alpha_1(y)$ et $\forall a, b \in L_2\ a \sqsubseteq_2 b \Rightarrow \alpha_2(a) \sqsubseteq_3 \alpha_2(b)$. En particulier si $a = \alpha_1(x)$ et $b = \alpha_1(y)$ ce qui donne :

$$\forall x, y \in L_1\ x \sqsubseteq_1 y \Rightarrow \alpha_1(x) \sqsubseteq_2 \alpha_1(y) \Rightarrow \alpha_2(\alpha_1(x)) \sqsubseteq_3 \alpha_2(\alpha_1(y))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall x, y \in L_1\ x \sqsubseteq_1 y \Rightarrow \alpha(x) \sqsubseteq_3 \alpha(y)$$

b) γ monotone : Par hypothèse $\forall x, y \in L_2\ x \sqsubseteq_2 y \Rightarrow \gamma_1(x) \sqsubseteq_1 \gamma_1(y)$ et $\forall a, b \in L_3\ a \sqsubseteq_3 b \Rightarrow \gamma_2(a) \sqsubseteq_2 \gamma_2(b)$. En particulier si $x = \gamma_2(x)$ et $y = \gamma_2(y)$ ce qui donne :

$$\forall x, y \in L_3\ x \sqsubseteq_3 y \Rightarrow \gamma_2(x) \sqsubseteq_2 \gamma_2(y) \Rightarrow \gamma_1(\gamma_2(x)) \sqsubseteq_1 \gamma_1(\gamma_2(y))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall x, y \in L_3\ x \sqsubseteq_3 y \Rightarrow \gamma(x) \sqsubseteq_1 \gamma(y)$$

c) $\alpha(x) \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \subseteq \gamma(y)$: On utilise les définitions de (α_1, γ_1) et (α_2, γ_2).

$$\begin{array}{lll} & \alpha(x) \sqsubseteq_3 y & \\ \Leftrightarrow & \alpha_2(\alpha_1(x)) \sqsubseteq_3 y & \textit{(Par def de } \alpha\textit{)} \\ \Rightarrow & \alpha_1(x) \sqsubseteq_2 \gamma_2(y) & \textit{(Par def de } (\alpha_2, \gamma_2)\textit{)} \\ \Rightarrow & x \sqsubseteq_1 \gamma_1(\gamma_2(y)) & \textit{(Par def de } (\alpha_1, \gamma_1)\textit{)} \\ \Leftrightarrow & x \sqsubseteq_1 \gamma(y) & \textit{(Par def de } \gamma\textit{)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & x \sqsubseteq_1 \gamma(y) & \\ \Leftrightarrow & x \sqsubseteq_1 \gamma_1(\gamma_2(y)) & \textit{(Par def de } \gamma\textit{)} \\ \Rightarrow & \alpha_1(x) \sqsubseteq_2 \gamma_2(y) & \textit{(Par def de } (\alpha_2, \gamma_2)\textit{)} \\ \Rightarrow & \alpha_2(\alpha_1(x)) \sqsubseteq_3 y & \textit{(Par def de } (\alpha_1, \gamma_1)\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \alpha(x) \sqsubseteq_3 y & \textit{(Par def de } \alpha\textit{)} \end{array}$$

2 Interprétation des signes

On cherche à définir une interprétation des signes des entiers d'un programme.
Le treillis des signes est celui de la figure 1. On rappelle que $\mathcal{V}al = \mathbb{Z} \cup \mathbb{B} \cup String$. On définit

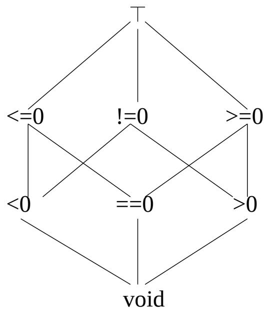


Figure 1: Treillis des signes

une correspondance de Galois entre les propriétés et les signes.

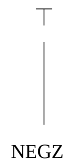
$$\langle \mathbb{P}(\mathcal{V}al \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}), \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle Sign, \sqsubseteq \rangle$$

Exercice 2 *Exprimer la fonction de concrétisation γ des signes.*

Correction 2 *Une fonction de concrétisation γ possible est :*

s	$\gamma(s)$
$void$	$\{Wrong, Err, Err_{init}\}$
$\top$	$\mathcal{V}al \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}$
$== 0$	$\{0\} \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}$
> 0	$\{n \mid n \in \mathbb{Z},\ n > 0\} \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}$
< 0	$\{n \mid n \in \mathbb{Z},\ n < 0\} \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}$
$>= 0$	$\{n \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\} \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}$
$<= 0$	$\{n \mid n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0\} \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}$
$! = 0$	$\{n \mid n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\} \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}$

Nous cherchons à vérifier une propriété moins *forte* que le treillis des signes : la valeur est inférieure ou égal à 0. Pour cela on essaye d'interpréter les signes par un treillis plus simple. Nous définissons une correspondance de Galois entre les signes et le treillis $\langle\{NEGZ, \top\}, \sqsubseteq^{\#}\rangle$ où $NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top$, $NEGZ \sqsubseteq^{\#} NEGZ$, $\top \sqsubseteq^{\#} \top$.



La correspondance (α_1, γ_1) est la suivante :

$$\langle Sign, \sqsubseteq\rangle \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \langle\{NEGZ, \top\}, \sqsubseteq^{\#}\rangle$$

Exercice 3 *Donner la fonction d'abstraction* α_1 *et la fonction de concrétisation* γ_1.

Correction 3 *Une possibilité est :*

s	$\alpha_1(s)$
void	$NEGZ$
$\top$	$\top$
$==0$	$NEGZ$
>0	$\top$
<0	$NEGZ$
$>=0$	$\top$
$<=0$	$NEGZ$
$!=0$	$\top$

u	$\gamma_1(u)$
$\top$	$\top$
$NEGZ$	$<=0$

Exercice 4 *Montrer que vos deux fonctions forment bien une correspondance de Galois.*

Correction 4 *Comme nous avons directement la fonction d'abstraction et de concrétisation, une vérification directe des propriété est possible.*

- γ_1 *monotone :* $NEGZ \sqsubseteq^{\#} \to\ \Rightarrow\ <=0 \sqsubseteq \top$ *;*
- α_1 *monotone : les couples sont biens ordonnés :*

$$\begin{array}{lcl}
void \sqsubseteq >0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
void \sqsubseteq ==0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} NEGZ \\
void \sqsubseteq <0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
void \sqsubseteq >=0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
void \sqsubseteq <=0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} NEGZ \\
void \sqsubseteq !=0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
void \sqsubseteq \top & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
>0 \sqsubseteq >=0 & \Rightarrow & \top \sqsubseteq^{\#} \top \\
>0 \sqsubseteq \top & \Rightarrow & \top \sqsubseteq^{\#} \top \\
>0 \sqsubseteq !=0 & \Rightarrow & \top \sqsubseteq^{\#} \top
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
<0 \sqsubseteq <=0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} NEGZ \\
<0 \sqsubseteq \top & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
<0 \sqsubseteq !=0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
>=0 \sqsubseteq \top & \Rightarrow & \top \sqsubseteq^{\#} \top \\
<=0 \sqsubseteq \top & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
=0 \sqsubseteq >=0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
=0 \sqsubseteq <=0 & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} NEGZ \\
=0 \sqsubseteq \top & \Rightarrow & NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top \\
!=0 \sqsubseteq \top & \Rightarrow & \top \sqsubseteq^{\#} \top
\end{array}$$

- *montrer que* $\alpha_1(x) \sqsubseteq^{\#} y \Leftrightarrow x \sqsubseteq \gamma_1(y)$ *: On recherche les couples* (z, y) *tel que* $\alpha(x) \sqsubseteq^{\#} y$

soit :

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha_1(\top) & \sqsubseteq^{\#} & \top & \Leftrightarrow & \top & \sqsubseteq & \gamma_1(\top) \\
\alpha_1(>= 0) & \sqsubseteq^{\#} & \top & \Leftrightarrow & >= 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(\top) \\
\alpha_1(! = 0) & \sqsubseteq^{\#} & \top & \Leftrightarrow & ! = 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(\top) \\
\alpha_1(<= 0) & \sqsubseteq^{\#} & \top & \Leftrightarrow & <= 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(\top) \\
\alpha_1(> 0) & \sqsubseteq^{\#} & \top & \Leftrightarrow & > 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(\top) \\
\alpha_1(< 0) & \sqsubseteq^{\#} & \top & \Leftrightarrow & < 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(\top) \\
\alpha_1(== 0) & \sqsubseteq^{\#} & \top & \Leftrightarrow & == 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(\top) \\
\alpha_1(void) & \sqsubseteq^{\#} & \top & \Leftrightarrow & void & \sqsubseteq & \gamma_1(\top) \\
\alpha_1(<= 0) & \sqsubseteq^{\#} & NEGZ & \Leftrightarrow & <= 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(NEGZ) \\
\alpha_1(< 0) & \sqsubseteq^{\#} & NEGZ & \Leftrightarrow & < 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(NEGZ) \\
\alpha_1(== 0) & \sqsubseteq^{\#} & NEGZ & \Leftrightarrow & == 0 & \sqsubseteq & \gamma_1(NEGZ) \\
\alpha_1(void) & \sqsubseteq^{\#} & NEGZ & \Leftrightarrow & void & \sqsubseteq & \gamma_1(NEGZ)
\end{array}$$

Exercice 5 *Que pensez vous de la composition ainsi réalisée ?*

Correction 5 *Le point principal est que, par les questions précédentes, la composition ainsi réalisée est une correspondance de Galois. Elle perd certes beaucoup d'information, mais cette perte est structurée en deux étapes : d'abord on ne garde que les signes, ensuite on ne garde plus que l'information "être négatif ou nul" ou son contraire. Cette approche permet le développement modulaire de correspondances de Galois.*

Correction.

Documents autorisés (en particulier le poly).

Problème

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de *lettres* a, b, c, etc. Un *mot* M est une suite possiblement vide de lettres; on note ϵ le mot vide, M_1M_2 la concaténation de M_1 avec M_2.

On se donne un ensemble NT de *non-terminaux*, supposé disjoint de $\mathcal{A}$. Une *grammaire hors-contexte* G est un ensemble fini de *productions* de la forme:

$$X \to Y_1 Y_2 \dots Y_n$$

où X est un non-terminal et Y_1, Y_2, ..., Y_n sont des lettres ou des non-terminaux. (Dans le cas $n = 0$, on notera $X \to \epsilon$ au lieu de $X \to$.) Une grammaire contient d'autre part un non-terminal spécial S, appelé le non-terminal *de départ*.

Un *environnement* ρ est une fonction qui à chaque non-terminal X associe un ensemble de mots. Par extension, on définit aussi $\rho(a)$ lorsque a est une lettre par $\rho(a) = \{a\}$.

Pour chaque non-terminal X, on pose :

$$[\![G]\!]_X(\rho) = \{M_1 M_2 \dots M_n \mid X \to Y_1 Y_2 \dots Y_n \text{ production de } G, M_1 \in \rho(Y_1), M_2 \in \rho(Y_2), \dots, M_n \in \rho(Y_n)\}$$

et on définit la fonction $[\![G]\!]$ qui envoie des environnements vers des environnements :

$$[\![G]\!](\rho) = \lambda X \cdot [\![G]\!]_X(\rho)$$

1. On considère la grammaire G_{ID} :

$$\begin{array}{c}
ID \quad \to \quad LETTRE\ ALPHA\text{-}LISTE \\
LETTRE \to \text{‘a’} \quad LETTRE \to \text{‘b’} \quad \dots \quad LETTRE \to \text{‘z’} \\
ALPHA\text{-}LISTE \quad \to \quad \epsilon \\
ALPHA\text{-}LISTE \quad \to \quad ALPHA\text{-}LISTE\ ALPHA \\
ALPHA \to LETTRE \quad ALPHA \to \text{‘_’}
\end{array}$$

   où l'on note ‘a’ pour la lettre a, par exemple, pour la distinguer d'un non-terminal. Le non-terminal de départ est ID. (Intuitivement, cette grammaire représente toutes les suites non vides de lettres entre a et z, ou _, qui ne commencent pas par _.)

   Si ρ_0 envoie chaque non-terminal vers $\emptyset$, que valent $\rho_1 = [\![G_{ID}]\!](\rho_0)$? $\rho_2 = [\![G_{ID}]\!](\rho_1)$? $\rho_3 = [\![G_{ID}]\!](\rho_2)$?

   On a :

	ID	$LETTRE$	$ALPHA$	$ALPHA\text{-}LISTE$
ρ_1	$\emptyset$	$\{$‘*a*’, ‘*b*’, $\dots$, ‘*z*’$\}$	$\{$‘_’$\}$	$\{\epsilon\}$
ρ_2	$\{$‘*a*’, ‘*b*’, $\dots$, ‘*z*’$\}$	$\{$‘*a*’, ‘*b*’, $\dots$, ‘*z*’$\}$	$\{$‘*a*’, ‘*b*’, $\dots$, ‘*z*’, ‘_’$\}$	$\{\epsilon$, ‘_’$\}$
ρ_3	$\{$‘*a*’, ‘*b*’, $\dots$, ‘*z*’, ‘*a_*’, ‘*b_*’, $\dots$, ‘*z_*’$\}$	$\{$‘*a*’, ‘*b*’, $\dots$, ‘*z*’$\}$	$\{$‘*a*’, ‘*b*’, $\dots$, ‘*z*’, ‘_’$\}$	$\{$‘*a*’, ‘*b*’, $\dots$, ‘*z*’, ‘_’, ‘*_a*’, ‘*_b*’, $\dots$, ‘*_z*’, ‘__’$\}$

2. On ordonne l'ensemble $L^\flat$ des environnements par $\rho \subseteq^* \rho'$ si et seulement si $\rho(X) \subseteq \rho'(X)$ pour tout non-terminal X. Montrer que, pour toute grammaire G, $[\![G]\!]$ est monotone.

   Supposons $\rho \subseteq^* \rho'$, et montrons que $[\![G]\!]_X(\rho) \subseteq [\![G]\!]_X(\rho')$. Si M est un mot de $[\![G]\!]_X(\rho)$, c'est que par définition M est de la forme $M_1 M_2 \dots M_n$ avec $M_1 \in \rho(Y_1)$, ..., $M_n \in \rho(Y_n)$, où $X \to Y_1 Y_2 \dots Y_n$ est une production de G. Comme $\rho(Y_i) \subseteq \rho'(Y_i)$ pour tout i, $M \in [\![G]\!]_X(\rho')$.

3. Soit Rec_G le plus petit point fixe de $[\![G]\!]$. Pourquoi ce plus petit point fixe existe-t-il ? L'ensemble des mots *reconnus* par une grammaire G en X est $Rec_G(X)$ par définition. (Indication : si vous vous basez sur un théorème du cours, n'oubliez pas de vérifier les conditions sous lesquelles il est applicable.)

$L^\flat$ est un treillis complet: l'inf d'une famille d'environnements ρ_i, $i \in I$, est en effet l'environnement qui à tout X associe $\bigcap_{i\in I} \rho_i(X)$, et le sup est $\bigcup_{i\in I} \rho_i(X)$. Le plus petit point fixe existe alors par le théorème de Tarski.

4. On considère le treillis abstrait $L^\sharp_v$ consistant en deux éléments $\mathtt{EPS}$ et $\overline{\mathtt{EPS}}$, ordonnés par $\overline{\mathtt{EPS}} \sqsubseteq_v \mathtt{EPS}$. Leur sémantique est donnée par: $\gamma_v(\mathtt{EPS})$ est l'ensemble de tous les mots, $\gamma_v(\overline{\mathtt{EPS}})$ est l'ensemble de tous les mots non vides. Décrire l'unique fonction α_v telle que (α_v, γ_v) est une correspondance de Galois. Justifier.

   Par définition, si α_v existe, pour tout ensemble de mots E, $\alpha_v(E) = \min_{\sqsubseteq_v}\{v^\sharp \mid E \subseteq \gamma(v^\sharp)\}$. En particulier $\alpha_v(E) = \overline{\mathtt{EPS}}$ si et seulement si E est un ensemble de mots non vides, et $\alpha_v(E) = \mathtt{EPS}$ si et seulement si E contient le mot vide ϵ.

5. Un environnement abstrait $\rho^\sharp_v$ est une fonction qui à chaque non-terminal associe un élément de $L^\sharp_v$. On pose $\gamma^*_v(\rho^\sharp_v) = \lambda X \cdot \gamma_v(\rho^\sharp_v(X))$, $\alpha^*_v(\rho) = \lambda X \cdot \alpha_v(\rho(X))$. On pose aussi $[\![G]\!]^\sharp_v(\rho^\sharp_v) = \alpha^*_v([\![G]\!](\gamma^*_v(\rho^\sharp_v)))$.

   Montrer que $[\![G]\!]^\sharp_v(\rho^\sharp_v)$ vaut l'environnement abstrait qui à tout non-terminal X associe $\mathtt{EPS}$ si et seulement s'il existe une production $X \to Y_1Y_2\ldots Y_n$ (avec X en tête) telle que tous les Y_i sont des non-terminaux et $\rho^\sharp_v(Y_i) = \mathtt{EPS}$.

   Notons que $[\![G]\!]^\sharp_v(\rho^\sharp_v) = \lambda X \cdot \alpha_v([\![G]\!](\gamma^*_v(\rho^\sharp_v))(X)) = \lambda X \cdot \alpha_v([\![G]\!](\lambda X' \cdot \gamma_v(\rho^\sharp_v(X')))(X))$
   Or $[\![G]\!]^\sharp_v(\rho^\sharp_v)(X) = \mathtt{EPS}$ si et seulement si $\alpha_v([\![G]\!](\lambda X' \cdot \gamma_v(\rho^\sharp_v(X')))(X)) = \mathtt{EPS}$ si et seulement si $[\![G]\!](\lambda X' \cdot \gamma_v(\rho^\sharp_v(X'))(X)$ contient le mot vide, si et seulement s'il existe une production $X \to Y_1Y_2\ldots Y_n$ (avec X en tête) telle que tous les Y_i sont des non-terminaux et $\gamma_v(\rho^\sharp_v(Y_i))$ contient le mot vide. Mais $\gamma_v(\rho^\sharp_v(Y_i))$ contient le mot vide si et seulement si $\rho^\sharp_v(Y_i) = \mathtt{EPS}$.

6. En déduire que l'on peut calculer une approximation correcte de la reconnaissance de ϵ en calculant le plus petit point fixe $Rec^\sharp_v$ de $[\![G]\!]^\sharp_v$, au sens où si le mot vide ϵ est reconnu par G en X, alors $Rec^\sharp_v(X) = \mathtt{EPS}$. Justifier.

   Par le théorème de Cousot, le plus petit point fixe de $[\![G]\!]$, Rec_G, est plus petit ou égal à γ^*_v du plus petit point fixe $Rec^\sharp_G$ de $[\![G]\!]^\sharp_v$. Autrement dit, $Rec_G \subseteq^* \gamma^*_v(Rec^\sharp_G)$. En particulier $Rec_G(X) \subseteq \gamma_v(Rec^\sharp_G(X))$. Si le mot vide est reconnu par G en X, alors $\epsilon \in Rec_G(X)$, donc $Rec^\sharp_G(X)$ ne peut pas valoir $\overline{\mathtt{EPS}}$, puisque $\epsilon \notin \gamma_v(\overline{\mathtt{EPS}})$. Techniquement, il faut encore vérifier que (α^*_v, γ^*_v) est une correspondance de Galois : c'est le transparent 68 du cours.
   Donc il suffit de calculer $Rec^\sharp_G(X)$, en calculant d'abord $Rec^\sharp_G$. Un algorithme possible est comme suit, remarquant que le treillis des environnements abstraits est de hauteur finie. On initialise l'environnement abstrait $R^\sharp_v$ à celui qui envoie chaque non-terminal vers $\overline{\mathtt{EPS}}$. (On peut coder $R^\sharp_v$ comme une liste d'association, une table de hachage, etc.) On itère ensuite la boucle suivante: on pose ${R'}^\sharp_v$ qui envoie chaque non-terminal Y vers $\mathtt{EPS}$ si et seulement si $R^\sharp_v(Y) = \mathtt{EPS}$ ou bien il existe une production $Y \to Y_1Y_2\ldots Y_n$ telle que pour tout i, Y_i est un non-terminal et $R^\sharp_v(Y_i) = \mathtt{EPS}$. (Ceci calcule ${R'}^\sharp_v$ comme le sup de $R^\sharp_v$ et $[\![G]\!]^\sharp_v(R^\sharp_v)$.) Si pour tout Y ${R'}^\sharp_v(Y) = R^\sharp_v(Y)$ alors stop: $Rec^\sharp_G(X)$ vaut $R^\sharp_v(X)$; sinon on itère.