Conservatoire National des Arts et Métiers
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
DESS DLS : Développement de Logiciels Sûrs
2000/2001

Parrennes Fabrice
Fabrice.Parrennes@lip6.fr
http://www-spi.lip6.fr/~parrenne/Cours/DLS

$\boxed{\text{Examen 2001}}$

1 Correspondance de Galois

Rappel 1 *Soit deux ensembles partiellement ordonnés $\langle D, \subseteq \rangle$ et $\langle S, \sqsubseteq \rangle$. Une correspondance de Galois est une paire de fonctions α, γ telle que :*

- *α est monotone ;*
- *γ est monotone ;*
- *$\alpha(x) \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \subseteq \gamma(y)$.*

On note alors :

$$\langle D, \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle S, \sqsubseteq \rangle$$

Exercice 1 *Soit trois ensembles partiellement ordonnée $\langle L_1, \sqsubseteq_1 \rangle$, $\langle L_2, \sqsubseteq_2 \rangle$ et $\langle L_3, \sqsubseteq_3 \rangle$. On définit deux correspondances de Galois : une entre L_1 et L_2 et l'autre entre L_2 et L_3 :*

$$\langle L_1, \sqsubseteq_1 \rangle \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \langle L_2, \sqsubseteq_2 \rangle \qquad \langle L_2, \sqsubseteq_2 \rangle \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\leftrightarrows}} \langle L_3, \sqsubseteq_3 \rangle$$

On définit deux nouvelles fonctions $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$ et $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$.
Montrer que (α, γ) forme une correspondance de Galois entre $\langle L_1, \sqsubseteq_1 \rangle$ et $\langle L_3, \sqsubseteq_3 \rangle$.

2 Interprétation des signes

On cherche à définir une interprétation des signes des entiers d'un programme.
Le treillis des signes est celui de la figure 1. On rappelle que $\mathcal{V}al = \mathbb{Z} \cup \mathbb{B} \cup String$. On définit

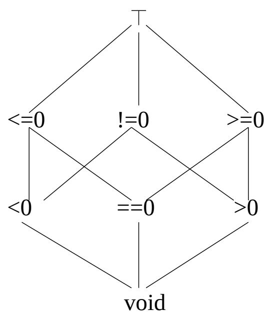

Figure 1: Treillis des signes

une correspondance de Galois entre les propriétés et les signes.

$$\langle \mathbb{P}(\mathcal{V}al \cup \{Wrong, Err, Err_{init}\}), \subseteq \rangle \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} \langle Sign, \sqsubseteq \rangle$$

Exercice 2 *Exprimer la fonction de concrétisation γ des signes.*

Nous cherchons à vérifier une propriété moins *forte* que le treillis des signes : la valeur est inférieure ou égal à 0. Pour cela on essaye d'interpréter les signes par un treillis plus simple. Nous définissons une correspondance de Galois entre les signes et le treillis $\langle \{NEGZ, \top\}, \sqsubseteq^{\#} \rangle$ où $NEGZ \sqsubseteq^{\#} \top$, $NEGZ \sqsubseteq^{\#} NEGZ$, $\top \sqsubseteq^{\#} \top$.

$$\begin{tikzcd} \top \arrow[d, dash] \\ \text{NEGZ} \end{tikzcd}$$

La correspondance (α_1, γ_1) est la suivante :

$$\langle Sign, \sqsubseteq \rangle \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\leftrightarrows}} \langle \{NEGZ, \top\}, \sqsubseteq^{\#} \rangle$$

Exercice 3 *Donner la fonction d'abstraction α_1 et la fonction de concrétisation γ_1.*

Exercice 4 *Montrer que vos deux fonctions forment bien une correspondance de Galois.*

Exercice 5 *Que pensez vous de la composition ainsi réalisée ?*

Documents autorisés (en particulier le poly).

Problème

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de *lettres* a, b, c, etc. Un *mot* M est une suite possiblement vide de lettres; on note ϵ le mot vide, M_1M_2 la concaténation de M_1 avec M_2.

On se donne un ensemble NT de *non-terminaux*, supposé disjoint de $\mathcal{A}$. Une *grammaire hors-contexte* G est un ensemble fini de *productions* de la forme:

$$X \to Y_1Y_2 \dots Y_n$$

où X est un non-terminal et Y_1, Y_2, …, Y_n sont des lettres ou des non-terminaux. (Dans le cas $n = 0$, on notera $X \to \epsilon$ au lieu de $X \to$.) Une grammaire contient d'autre part un non-terminal spécial S, appelé le non-terminal *de départ*.

Un *environnement* ρ est une fonction qui à chaque non-terminal X associe un ensemble de mots. Par extension, on définit aussi $\rho(a)$ lorsque a est une lettre par $\rho(a) = \{a\}$.

Pour chaque non-terminal X, on pose :

$$[\![G]\!]_X(\rho) = \{M_1M_2 \dots M_n \mid X \to Y_1Y_2 \dots Y_n \text{ production de } G, M_1 \in \rho(Y_1), M_2 \in \rho(Y_2), \dots, M_n \in \rho(Y_n)\}$$

et on définit la fonction $[\![G]\!]$ qui envoie des environnements vers des environnements :

$$[\![G]\!](\rho) = \lambda X \cdot [\![G]\!]_X(\rho)$$

1. On considère la grammaire G_{ID} :

$$\begin{array}{c}
ID \quad \to \quad LETTRE\ ALPHA\text{-}LISTE \\
LETTRE \to \text{‘a’} \quad LETTRE \to \text{‘b’} \quad \dots \quad LETTRE \to \text{‘z’} \\
ALPHA\text{-}LISTE \quad \to \quad \epsilon \\
ALPHA\text{-}LISTE \quad \to \quad ALPHA\text{-}LISTE\ ALPHA \\
ALPHA \to LETTRE \quad ALPHA \to \text{‘_’}
\end{array}$$

   où l'on note ‘a’ pour la lettre a, par exemple, pour la distinguer d'un non-terminal. Le non-terminal de départ est ID. (Intuitivement, cette grammaire représente toutes les suites non vides de lettres entre a et z, ou _, qui ne commencent pas par _.)

   Si ρ_0 envoie chaque non-terminal vers $\emptyset$, que valent $\rho_1 = [\![G_{ID}]\!](\rho_0)$? $\rho_2 = [\![G_{ID}]\!](\rho_1)$? $\rho_3 = [\![G_{ID}]\!](\rho_2)$?

2. On ordonne l'ensemble $L^\flat$ des environnements par $\rho \subseteq^* \rho'$ si et seulement si $\rho(X) \subseteq \rho'(X)$ pour tout non-terminal X. Montrer que, pour toute grammaire G, $[\![G]\!]$ est monotone.

3. Soit Rec_G le plus petit point fixe de $[\![G]\!]$. Pourquoi ce plus petit point fixe existe-t-il ? L'ensemble des mots *reconnus* par une grammaire G en X est $Rec_G(X)$ par définition. (Indication : si vous vous basez sur un théorème du cours, n'oubliez pas de vérifier les conditions sous lesquelles il est applicable.)

4. On considère le treillis abstrait $L_v^\sharp$ consistant en deux éléments EPS et $\overline{\text{EPS}}$, ordonnés par $\overline{\text{EPS}} \sqsubseteq_v \text{EPS}$. Leur sémantique est donnée par: $\gamma_v(\text{EPS})$ est l'ensemble de tous les mots, $\gamma_v(\overline{\text{EPS}})$ est l'ensemble de tous les mots non vides. Décrire l'unique fonction α_v telle que (α_v, γ_v) est une correspondance de Galois. Justifier.

5. Un environnement abstrait $\rho_v^\sharp$ est une fonction qui à chaque non-terminal associe un élément de $L_v^\sharp$. On pose $\gamma_v^*(\rho_v^\sharp) = \lambda X \cdot \gamma_v(\rho_v^\sharp(X))$, $\alpha_v^*(\rho) = \lambda X \cdot \alpha_v(\rho(X))$. On pose aussi $[\![G]\!]_v^\sharp(\rho_v^\sharp) = \alpha_v^*([\![G]\!](\gamma_v^*(\rho_v^\sharp)))$.

   Montrer que $[\![G]\!]_v^\sharp(\rho_v^\sharp)$ vaut l'environnement abstrait qui à tout non-terminal X associe EPS si et seulement s'il existe une production $X \to Y_1Y_2 \dots Y_n$ (avec X en tête) telle que tous les Y_i sont des non-terminaux et $\rho_v^\sharp(Y_i) = \text{EPS}$.

6. En déduire que l'on peut calculer une approximation correcte de la reconnaissance de ϵ en calculant le plus petit point fixe $Rec_v^\sharp$ de $[\![G]\!]_v^\sharp$, au sens où si le mot vide ϵ est reconnu par G en X, alors $Rec_v^\sharp(X) = \text{EPS}$. Justifier.