Documents autorisés (en particulier le poly).

Exercices

1. On considère le treillis $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, muni de l'ordre $\leq$ usuel étendu par $n \leq +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $+\infty \not\leq n$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$. Quel est le sup de la partie $\{0, 2, 4, \ldots\} \hat{=} \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des entiers pairs ?

   (a) 0 (b) $+\infty$ (c) 42

2. Donner un exemple de supremum qui n'est pas un maximum (on pourra se fonder sur la question précédente). Justifier.

3. Montrer que dans tout treillis complet $(L, \sqsubseteq, \bigsqcup, \bigsqcap)$, on a :

$$v \sqsubseteq \bigsqcap_{i \in I} v_i \Leftrightarrow \forall i \in I \cdot v \sqsubseteq v_i$$

   Vous pouvez vous inspirer de résultats similaires du cours. (Si vous faites référence à un résultat du cours, donnez le numéro de transparent précis, et l'énoncé du résultat.) On rappelle que $\bigsqcap$ est caractérisé par les propriétés :

(1)	$\forall j \in I \cdot \bigsqcap_{i \in I} v_i \sqsubseteq v_j$	(minorant)
(2)	$\forall v \cdot (\forall j \in I \cdot v \sqsubseteq v_j) \Rightarrow v \sqsubseteq \bigsqcap_{i \in I} v_i$	(plus grand des minorants)

4. Soit une correspondance de Galois entre deux treillis complets :

$$L^\sharp, \sqsubseteq^\sharp \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftarrows}} L^\flat, \sqsubseteq^\flat$$

   (abstrait) (concret)

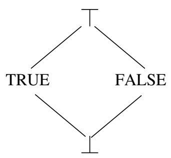
   On rappelle que ceci signifie que α et γ sont monotones, et que $\alpha(v^\flat) \sqsubseteq^\sharp v^\sharp$ si et seulement si $v^\flat \sqsubseteq^\flat \gamma(v^\sharp)$.

   Montrer que γ *préserve les infs*, c'est-à-dire que :

$$\gamma(\overset{\sharp}{\bigsqcap_{i \in I}} v_i^\sharp) = \overset{\flat}{\bigsqcap_{i \in I}} \gamma(v_i^\sharp)$$

   On pourra encore s'inspirer du cours, et utiliser la question précédente.

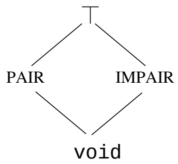
5. On choisit comme treillis abstrait $L^\sharp \hat{=} \{\top, \text{TRUE}, \text{FALSE}, \bot\}$ avec $\bot \sqsubseteq^\sharp \text{TRUE} \sqsubseteq^\sharp \top$, $\bot \sqsubseteq^\sharp \text{FALSE} \sqsubseteq^\sharp \top$ et TRUE et FALSE incomparables :



   On définit $\gamma(\top) \hat{=} \{\text{true}, \text{false}, Err\}$, $\gamma(\text{TRUE}) \hat{=} \{\text{true}, Err\}$, $\gamma(\text{FALSE}) \hat{=} \{\text{false}, Err\}$, $\gamma(\bot) \hat{=} \emptyset$. Utiliser la question précédente pour montrer qu'on ne peut pas trouver de fonction $\alpha : \mathbb{P}\{\text{true}, \text{false}, Err\}, \subseteq \longrightarrow L^\sharp, \sqsubseteq^\sharp$ telle que α, γ soit une correspondance de Galois. Proposer une modification (légère) de $L^\sharp$ ou de γ permettant de trouver un tel α.

Problème

On cherche à déterminer la parité des entiers utilisés dans un programme, et de là des propriétés qui vont en se compliquant. On reprend le mini-langage du cours, et on consière le treillis $L_2^\sharp, \sqsubseteq_2^\sharp$:



et une concrétisation γ_2 :

$v^\sharp$	$\gamma_2(v^\sharp)$
`void`	$\{Err, Wrong, Err_{init}\}$
PAIR	$\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{Err, Wrong, Err_{init}\} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots, Err, Wrong, Err_{init}\}$
IMPAIR	$\{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{Err, Wrong, Err_{init}\} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots, Err, Wrong, Err_{init}\}$
$\top$	$\mathcal{V}al \cup \{Err, Wrong, Err_{init}\}$

où l'on rappelle que $\mathcal{V}al = \mathbb{Z} \cup \mathbb{B} \cup String$.

1. Décrire explicitement l'abstraction $\alpha_2 : \mathbb{P}(\mathcal{V}al \cup \{Err, Wrong, Err_{init}\}), \subseteq \longrightarrow L_2^\sharp, \sqsubseteq_2^\sharp$. Autrement dit, que vaut $\alpha_2(A)$, pour chaque partie A de $\mathcal{V}al \cup \{Err, Wrong, Err_{init}\}$? Distinguer quatre cas (au moins).

2. Compléter les tables de calcul de l'addition et de la division :

$+^\sharp$	`void`	PAIR	IMPAIR	$\top$
`void`	`void`	`void`	`void`	?
PAIR	?	?	?	$\top$
IMPAIR	?	?	?	$\top$
$\top$	?	$\top$	$\top$	$\top$

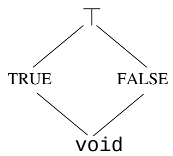
$/^\sharp$	`void`	PAIR	IMPAIR	$\top$
`void`	`void`	`void`	`void`	?
PAIR	?	?	?	$\top$
IMPAIR	?	?	?	$\top$
$\top$	?	$\top$	$\top$	$\top$

   On rappelle que la sémantique concrète de $/$ est la partie entière du quotient : $4/2 = 2$, $2/2 = 1$, mais $4/3 = 1$ et $2/3 = 0$.

3. A-t-on besoin d'utiliser un élargissement pour garantir la terminaison de l'analyses statique avant sur ce treillis ? Pourquoi ? Si oui, proposer un élargissement.

4. L'intérêt du treillis de parité est que le test $e_1 = e_2$ doit nécessairement échouer si e_1 est pair et e_2 impair, ou réciproquement. Que vaut PAIR $=^\sharp$ IMPAIR dans ce treillis, où $=^\sharp$ est la meilleure approximation de l'égalité $=$? (La sémantique concrète de $=$ est supposée retourner `true` sur deux valeurs égales, `false` sur deux valeurs différentes du même type, $Wrong$ sur deux valeurs de types différents.)

5. On considère le treillis des constantes booléennes $L_{\mathbb{B}}^\sharp, \sqsubseteq_{\mathbb{B}}^\sharp$:



   où $\gamma_{\mathbb{B}}(\top) = \mathcal{V}al \cup \{Err, Err_{init}, Wrong\}$, $\gamma_{\mathbb{B}}(\text{TRUE}) = \{\texttt{true}, Err, Err_{init}, Wrong\}$, $\gamma_{\mathbb{B}}(\text{FALSE}) = \{\texttt{false}, Err, Err_{init}, Wrong\}$, $\gamma_{\mathbb{B}}(\bot) = \{Err, Err_{init}, Wrong\}$.

   Dessiner le produit réduit de $L_2^\sharp$ avec $L_{\mathbb{B}}^\sharp$. Montrer qu'on peut définir l'égalité abstraite $=^\sharp$ de façon plus précise dans ce produit réduit que dans $L_2^\sharp$ seul, en particulier telle que PAIR $=^\sharp$ IMPAIR est strictement plus précis que $(\top, \top)$.

6. On veut améliorer la précision de l'analyse, et la combiner avec une analyse d'intervalles sur les entiers. Un élément de notre treillis final est donc dans le produit réduit $L^\sharp$ de $L_2^\sharp \times L_{\mathbb{B}}^\sharp \times L_{itv}^\sharp$, où $L_{itv}^\sharp$ est le treillis des intervalles du cours (valeurs $[\![a, b]\!]$ avec $a, b \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, plus $\top$). A-t-on besoin d'un élargissement ici pour garantir la terminaison des analyses ? Si oui, en proposer un.