Sémantique abstraite

De même, ce qu'on a calculé par la sémantique abstraite (cf. transparents 63 et suivants) est $Env^\sharp \hat{=} lfp_{\sqsubseteq^{\sharp *}}(\mathcal{P}^\sharp_\to)$, où $\mathcal{P}^\sharp_\to(E^\sharp)(p) \hat{=} \lambda x \cdot \top$ si $p = I$, $E^\sharp(p) \sqcup^\sharp \bigsqcup^\sharp \{cond^\sharp[\![instr]\!]\rho_1^\sharp \mid p_1 \xrightarrow{instr} p, \rho_1^\sharp = E^\sharp(p_1)\}$ sinon, et :

$$
\begin{array}{rcl}
cond^\sharp[\![x{:=}e]\!]\rho^\sharp & \hat{=} & \rho^\sharp[x \leftarrow \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp \rho^\sharp] \\
cond^\sharp[\![\texttt{input}\ x]\!]\rho^\sharp & \hat{=} & \rho^\sharp[x \leftarrow \top] \\
cond^\sharp[\![e \text{ vrai?}]\!]\rho^\sharp & \hat{=} & \begin{cases} \rho^\sharp & (\text{si } \texttt{true} \in \gamma(\mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp \rho^\sharp), \text{ i.e.} \texttt{bool} \sqsubseteq^\sharp \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp \rho^\sharp) \\ \lambda x \cdot \bot & (\text{sinon}) \end{cases} \\
cond^\sharp[\![e \text{ faux?}]\!]\rho^\sharp & \hat{=} & \begin{cases} \rho^\sharp & (\text{si } \texttt{false} \in \gamma(\mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp \rho^\sharp), \text{ i.e.} \texttt{bool} \sqsubseteq^\sharp \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp \rho^\sharp) \\ \lambda x \cdot \bot & (\text{sinon}) \end{cases} \\
cond^\sharp[\![\texttt{skip}]\!]\rho^\sharp & \hat{=} & \rho^\sharp
\end{array}
$$

Quelques résultats mathématiques . . .

Rappel : un *minorant* de $F \subseteq L$ est un $v \in L$ tel que $v \sqsubseteq x$ pour tout $x \in F$. L'*infimum* $\sqcap F$ de F (s'il existe) est le plus grand de tous les minorants de F :

$$\forall x \in F \cdot \sqcap F \sqsubseteq x \qquad (1)$$

$$\forall y \cdot (\forall x \in F \cdot y \sqsubseteq x) \Rightarrow y \sqsubseteq \sqcap F \qquad (2)$$

Théorème : Dans tout sup-demi-treillis complet $(L, \sqsubseteq, \sqcup)$, toute famille F a un infimum $\sqcap F$ (on dit que $(L, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap)$ est un treillis complet).

Démonstration : Posons $v \hat{=} \sqcup\{z \mid z \text{ minore } F\}$:

Si $x \in F$, $z \sqsubseteq x$ pour tout z qui minore F; donc x majore $\{z \mid z \text{ minore } F\}$; comme v est le majorant *minimal* de $\{z \mid z \text{ minore } F\}$, $v \sqsubseteq x$ (1).

Si y minore F, alors $y \in \{z \mid z \text{ minore } F\}$, donc $y \sqsubseteq v$ (2).

(Note : $\top \hat{=} \sqcap \emptyset$ est l'élément maximal de L.)

Théorème (Knaster-Tarski) : Dans tout treillis complet $(L, \sqsubseteq, \bigsqcup, \bigsqcap)$, toute fonction monotone $f : L \to L$ a un plus petit point fixe $v = lfp_{\sqsubseteq}(f)$:

$$f(v) = v \qquad (3)$$

$$\forall x \cdot f(x) = x \Rightarrow v \sqsubseteq x \qquad (4)$$

Démonstration : Soit $Post(f) \hat{=} \{x \mid f(x) \sqsubseteq x\}$ l'ensemble des post-points fixes de f. Posons $v \hat{=} \bigsqcap Post(f)$.

Pour tout $x \in Post(f)$, $v \sqsubseteq x$ (déf. de v). Donc $f(v) \sqsubseteq f(x)$ (f monotone). Comme $f(x) \sqsubseteq x$ (x post-point fixe de f), $f(v) \sqsubseteq x$. Comme x est arbitraire dans $Post(f)$, $f(v) \sqsubseteq \bigsqcap Post(f) = v$ (a).

Par (a), et f monotone, $f(f(v)) \sqsubseteq f(v)$. Donc $f(v) \in Post(f)$. Comme v minore $Post(f)$, $v \sqsubseteq f(v)$ (b).

Par (a), (b) et $\sqsubseteq$ antisymétrique, $v = f(v)$: v est un point fixe de f.

Si $f(x) = x$, $x \in Post(f)$, donc $v \sqsubseteq x$: v est le plus petit point fixe de f.

Soit une correspondance de Galois : $\quad D^\sharp, \sqsubseteq^\sharp \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\leftrightarrows}} D^\flat, \sqsubseteq^\flat$

entre treillis complets.

Théorème (Cousot) : si $f : D^\flat \to D^\flat$ monotone, alors
$lfp_{\sqsubseteq^\flat}(f) \sqsubseteq^\flat \gamma(lfp_{\sqsubseteq^\sharp}(\alpha \circ f \circ \gamma))$.
Démonstration : Soit $v \hat{=} lfp_{\sqsubseteq^\sharp}(\alpha \circ f \circ \gamma)$.

$$\begin{array}{rcll} f(\gamma(v)) & \sqsubseteq^\flat & \gamma(\alpha(f(\gamma(v)))) & \text{(car } x \sqsubseteq^\flat \gamma(\alpha(x)) \text{ pour tout } x) \\ & = & \gamma((\alpha \circ f \circ \gamma)(v)) & \\ & = & \gamma(v) & (v \text{ point fixe de } \alpha \circ f \circ \gamma) \end{array}$$

Donc $\gamma(v)$ est un post-point fixe de f. Mais $lfp_{\sqsubseteq^\flat}(f)$ est le plus petit post-point fixe de f (cf. démonstration de Knaster-Tarski). Donc $lfp_{\sqsubseteq^\flat}(f) \sqsubseteq^\flat \gamma(v)$.

Théorème (monotonie de lfp) : si $f, g : D \to D$ monotones et $f(x) \sqsubseteq g(x)$ pour tout $x \in D$, alors $lfp_{\sqsubseteq}(f) \sqsubseteq lfp_{\sqsubseteq}(g)$.
Démonstration : Soit $v \hat{=} lfp_{\sqsubseteq}(g)$; $f(v) \sqsubseteq g(v)$ (hypothèse) $= v$ (v est un point fixe de g). Donc v est un post-point fixe de f. Donc $lfp_{\sqsubseteq}(f) \sqsubseteq v$.

Lemme : $\bigsqcup_{i\in I} v_i \sqsubseteq v \Leftrightarrow \forall i \in I \cdot v_i \sqsubseteq v$.

Démonstration :

$\Rightarrow$: si $\bigsqcup_{i\in I} v_i \sqsubseteq v$, $v_i \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in I} v_i \sqsubseteq v$.

$\Leftarrow$: si $\forall i \in I \cdot v_i \sqsubseteq v$, v majore $\{v_i \mid i \in I\}$, donc $v \sqsupseteq \bigsqcup_{i\in I} v_i$.

Théorème : $\alpha(\bigsqcup^\flat_{i\in I} v_i) = \bigsqcup^\sharp_{i\in I} \alpha(v_i)$.

Démonstration : pour tout v,

$$\begin{aligned}
\alpha(\textstyle\bigsqcup^\flat_{i\in I} v_i) \sqsubseteq^\sharp v \quad &\Leftrightarrow \quad \textstyle\bigsqcup^\flat_{i\in I} v_i \sqsubseteq^\flat \gamma(v) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in I \cdot v_i \sqsubseteq^\flat \gamma(v) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall i \in I \cdot \alpha(v_i) \sqsubseteq^\sharp v \\
&\Leftrightarrow \quad \textstyle\bigsqcup^\sharp_{i\in I} \alpha(v_i) \sqsubseteq^\sharp v
\end{aligned}$$

$\subseteq$: prendre $v = \alpha(\bigsqcup^\flat_{i\in I} v_i)$. $\supseteq$: prendre $v = \bigsqcup^\sharp_{i\in I} \alpha(v_i)$.

Construction formelle de l'interprétation abstraite

Rappel (cf. transparent 71) : on veut que $\forall p \cdot Env(p) \subseteq \gamma_{NR}(Env^\sharp(p))$ (correction).

$Env \in \mathrm{PP} \rightarrow \mathbb{P}(\underbrace{\mathcal{V}ar \rightarrow \mathcal{V}al}_{\mathcal{E}nv})$

(Ordre $\subseteq^*$: $Env_1 \subseteq^* Env_2 \Leftrightarrow \forall p \cdot Env_1(p) \subseteq Env_2(p)$)

$Env^\sharp \in \mathrm{PP} \rightarrow (\underbrace{\mathcal{V}ar \rightarrow L^\sharp}_{\mathcal{E}nv^\sharp})$

(Ordre $\sqsubseteq^{\sharp**}$: $Env_1^\sharp \sqsubseteq^{\sharp**} Env_2^\sharp \Leftrightarrow \forall p \cdot Env_1^\sharp(p) \sqsubseteq^{\sharp*} Env_2^\sharp(p)$)

On pose (**Ex:** c'est une correspondance de Galois) :

$\gamma_{ENR}(Env^\sharp) \hat{=} \lambda p \cdot \gamma_{NR}(Env^\sharp(p))$

$\alpha_{ENR}(Env) \hat{=} \lambda p \cdot \alpha_{NR}(Env(p))$.

La propriété de correction souhaitée est donc : $Env \subseteq^* \gamma_{ENR}(Env^\sharp)$.

…c'est-à-dire $lfp_{\subseteq^*}(\mathcal{P}_\to) \subseteq^* \gamma_{ENR}(Env^\sharp)$.

Par le théorème de Cousot, $Env_0^\sharp \hat{=} lfp_{\sqsubseteq^{\sharp**}}(\alpha_{ENR} \circ \mathcal{P}_\to \circ \gamma_{ENR})$ vérifie cette propriété.

(Rappel : $lfp_{\subseteq^*}(\mathcal{P}_\to) \subseteq^* \gamma_{ENR}(lfp_{\sqsubseteq^{\sharp**}}(\alpha_{ENR} \circ \mathcal{P}_\to \circ \gamma_{ENR})))$

On peut donc calculer la sémantique abstraite comme un plus petit point fixe de $\mathcal{P}^\sharp_{\to,0} \hat{=} \alpha_{ENR} \circ \mathcal{P}_\to \circ \gamma_{ENR}$.

(Ceci sera automatiquement correct, mais peut-être pas calculable : on va simplifier $\alpha_{ENR} \circ \mathcal{P}_\to \circ \gamma_{ENR}$ en s'autorisant à remplacer des expressions E incalculables par des E' calculables $\sqsupseteq^{\sharp*} E$.)

Partons de la sémantique concrète $\mathcal{P}_{\rightarrow}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{P}_{\rightarrow} & \hat{=} & \lambda E \cdot \lambda p \cdot \begin{cases} \mathcal{V}ar \rightarrow \mathcal{V}al & (p = I) \\ E(p) \cup \{\rho \mid \exists p_1, \rho_1 \in E(p_1), instr \cdot \\ \qquad p_1, \rho_1 \vdash instr \Rightarrow p, \rho\} & (p \neq I) \end{cases} \\
& = & \lambda E \cdot \lambda p \cdot \begin{cases} \mathcal{V}ar \rightarrow \mathcal{V}al & (p = I) \\ E(p) \cup \bigcup_{p_1 \mid p_1 \xrightarrow{instr} p} \{\rho \mid \exists \rho_1 \in E(p_1) \cdot \\ \qquad cond[\![instr]\!](\rho_1, \rho)\} & (p \neq I) \end{cases}
\end{array}
$$

(cf. transparent 70 pour $cond[\![instr]\!](\rho_1, \rho_2)$)

$$
\begin{array}{rl}
= & \lambda E \cdot \lambda p \cdot E_{init}(p) \cup \\
& \quad E(p) \cup \bigcup_{p_1 \mid p_1 \xrightarrow{instr} p} \{\rho \mid \exists \rho_1 \in E(p_1) \cdot cond[\![instr]\!](\rho_1, \rho)\}
\end{array}
$$

(où $E_{init} \hat{=} \lambda p \cdot \begin{cases} \mathcal{V}ar \rightarrow \mathcal{V}al & (p = I) \\ \emptyset & (p \neq I) \end{cases}$)

En utilisant le théorème du transparent 85 :

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{ENR} \circ \mathcal{P}_{\rightarrow} \\
=&\lambda E \cdot \lambda p \cdot \alpha_{NR}(E_{init}(p) \cup \\
&\qquad E(p) \cup \bigcup_{p_1 | p_1 \xrightarrow{instr} p} \{\rho \mid \exists \rho_1 \in E(p_1) \cdot cond[\![instr]\!](\rho_1, \rho)\}) \\
=&\lambda E \cdot \lambda p \cdot \alpha_{NR}(E_{init}(p)) \sqcup^{\sharp *} \\
&\quad \alpha_{NR}(E(p)) \sqcup^{\sharp *} \bigsqcup^{\sharp *}_{p_1 | p_1 \xrightarrow{instr} p} \alpha_{NR}\{\rho \mid \exists \rho_1 \in E(p_1) \cdot cond[\![instr]\!](\rho_1, \rho)\}
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{\sharp}_{\rightarrow,0} =& \alpha_{ENR} \circ \mathcal{P}_{\rightarrow} \circ \gamma_{ENR} \\
=& \lambda E^{\sharp} \cdot \lambda p \cdot \alpha_{NR}(E_{init}(p)) \sqcup^{\sharp *} \\
& \quad \alpha_{NR}(\gamma_{NR}(E^{\sharp}(p))) \sqcup^{\sharp *} \\
& \qquad \bigsqcup^{\sharp *}_{p_1 | p_1 \xrightarrow{instr} p} \alpha_{NR}\{\rho \mid \exists \rho_1 \in \gamma_{NR}(E^{\sharp}(p_1)) \cdot cond[\![instr]\!](\rho_1, \rho)\}
\end{aligned}
$$

Calculons chaque composante :

- $\alpha_{NR}(E_{init}(p)) = \lambda x \cdot \alpha\{\rho(x) \mid \rho \in E_{init}(p)\}$

$$= E^{\sharp}_{init}(p) \hat{=} \begin{cases} \top & (p = I) \\ \bot & (p \neq I) \end{cases}$$

- $\alpha_{NR}(\gamma_{NR}(E^{\sharp}(p))) \sqsubseteq^{\sharp *} E^{\sharp}(p)$ (Galois)

- Puis on calcule $cond^{\sharp}_0[\![instr]\!]\rho^{\sharp} \hat{=} \alpha_{NR}\{\rho \mid \exists \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^{\sharp}) \cdot cond[\![instr]\!](\rho_1, \rho)\}$, pour chaque forme possible de $instr$ ...

Cas $instr = x{:=}e$:

$$\begin{array}{rl} & cond_0^\sharp[\![x{:=}e]\!]\rho^\sharp \\ = & \alpha_{NR}\{\rho \mid \exists \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp) \cdot \rho = \rho_1[x \leftarrow \mathcal{E}[\![e]\!]\rho_1]\} \\ = & \alpha_{NR}\{\rho_1[x \leftarrow \mathcal{E}[\![e]\!]\rho_1] \mid \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)\} \\ = & \lambda y \cdot \alpha\{\rho_1[x \leftarrow \mathcal{E}[\![e]\!]\rho_1](y) \mid \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)\} \\ = & \lambda y \cdot \begin{cases} \alpha\{\mathcal{E}[\![e]\!]\rho_1 \mid \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)\} & (x = y) \\ \alpha\{\rho_1(y) \mid \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)\} & (x \neq y) \end{cases} \end{array}$$

Par le théorème de correction du transparent 44,
si $\rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)$ alors $\mathcal{E}[\![e]\!]\rho_1 \in \gamma(\mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp)$,
donc $\alpha\{\mathcal{E}[\![e]\!]\rho_1 \mid \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)\} \sqsubseteq^\sharp \alpha(\gamma(\mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp)) \sqsubseteq^\sharp \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp$.

Et $\alpha\{\rho_1(y) \mid \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)\} = \alpha_{NR}(\gamma_{NR}(\rho^\sharp))(y) \sqsubseteq^\sharp \rho^\sharp(y)$.

Donc $cond_0^\sharp[\![x{:=}e]\!]\rho^\sharp \sqsubseteq^{\sharp *} cond_1^\sharp[\![x{:=}e]\!]\rho^\sharp \hat{=} \rho^\sharp[x \leftarrow \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp]$.

Cas $instr = \texttt{input}\, x$:

$$
\begin{array}{rl}
& cond_0^\sharp[\![\texttt{input}\, x]\!]\rho^\sharp \\
= & \alpha_{NR}\{\rho \mid \exists \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp) \cdot \forall y \neq x \cdot \rho_1(y) = \rho(y)\} \\
= & \lambda y \cdot \alpha\{\rho(y) \mid \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp) \cdot \forall y \neq x \cdot \rho_1(y) = \rho(y)\} \\
= & \lambda y \cdot \begin{cases} \alpha(\mathcal{V}al) & (y = x) \\ \alpha\{\rho_1(y) \mid \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)\} & (y \neq x) \end{cases} \\
= & \lambda y \cdot \begin{cases} \top & (y = x) \\ \alpha_{NR}(\gamma_{NR}(\rho^\sharp))(y) & (y \neq x) \end{cases}
\end{array}
$$

Comme $\alpha_{NR}(\gamma_{NR}(\rho^\sharp))(y) \sqsubseteq^\sharp \rho^\sharp(y)$,
$cond_0^\sharp[\![\texttt{input}\, x]\!]\rho^\sharp \sqsubseteq^{\sharp *} cond_1^\sharp[\![\texttt{input}\, x]\!]\rho^\sharp \hat{=} \rho^\sharp[x \leftarrow \top]$.

Cas $instr = e$ vrai?/faux? ($b \hat{=} \texttt{true}$ si “vrai?”, $b \hat{=} \texttt{false}$ si “faux?”) :

$$\begin{aligned} cond_0^\sharp[\![instr]\!]\rho^\sharp &= \alpha_{NR}\{\rho \mid \exists \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp) \cdot \rho = \rho_1, \mathcal{E}[\![e]\!]\rho = b\} \\ &= \alpha_{NR}\{\rho \mid \rho \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp) \wedge \mathcal{E}[\![e]\!]\rho = b\} \\ &= \lambda x \cdot \alpha \underbrace{\{\rho(x) \mid \rho \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp) \wedge \mathcal{E}[\![e]\!]\rho = b\}}_{A} \end{aligned}$$

Par le thm. de correction du transparent 44, si $\rho \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)$ et $\mathcal{E}[\![e]\!]\rho = b$, alors $b \in \gamma(\mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp)$, donc $\{b\} \subseteq \gamma(\mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp)$, donc $\alpha\{b\} \sqsubseteq^\sharp \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp$. Or $\alpha\{b\} = \texttt{bool}$, donc $A \subseteq \{\rho(x) \mid \rho \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp) \wedge \texttt{bool} \sqsubseteq^\sharp \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp\}$.

Si $\texttt{bool} \sqsubseteq^\sharp \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp$, alors $cond_0^\sharp[\![instr]\!]\rho^\sharp = \lambda x \cdot \alpha(A) \sqsubseteq^{\sharp *} \lambda x \cdot \alpha\{\rho(x) \mid \rho \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp)\} = \lambda x \cdot \alpha_{NR}(\gamma_{NR}(\rho^\sharp))(x) \sqsubseteq^{\sharp *} \rho^\sharp$.

Sinon, $cond_0^\sharp[\![instr]\!]\rho^\sharp \sqsubseteq^{\sharp *} \lambda x \cdot \alpha(\emptyset) = \lambda x \cdot \bot$.

Donc $cond_0^\sharp[\![instr]\!]\rho^\sharp \sqsubseteq^{\sharp *} cond_1^\sharp[\![instr]\!]\rho^\sharp \hat{=} \begin{cases} \rho^\sharp & (\texttt{bool} \sqsubseteq^\sharp \mathcal{E}[\![e]\!]^\sharp\rho^\sharp) \\ \lambda x \cdot \bot & (\text{sinon}) \end{cases}$

Cas $instr = \texttt{skip}$:

$$\begin{array}{rcl} cond_0^\sharp[\![\texttt{skip}]\!]\rho^\sharp & = & \alpha_{NR}\{\rho \mid \exists \rho_1 \in \gamma_{NR}(\rho^\sharp) \cdot \rho = \rho_1\} \\ & = & \alpha_{NR}(\gamma_{NR}(\rho^\sharp)) \\ & \sqsubseteq^{\sharp *} & \rho^\sharp \end{array}$$

Donc $cond_0^\sharp[\![\texttt{skip}]\!]\rho^\sharp \sqsubseteq^{\sharp *} cond_1^\sharp[\![\texttt{skip}]\!]\rho^\sharp \hat{=} \rho^\sharp$.

Résumé des transparents 90 et suivants : nous avons montré que pour tout $E^\sharp \in \mathrm{PP} \to \mathcal{E}nv^\sharp$,

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{P}^\sharp_{\to,0}(E^\sharp) \sqsubseteq^{\sharp *} \mathcal{P}^\sharp_{\to,1}(E^\sharp) & \hat{=} & \lambda p \cdot E^\sharp_{init}(p) \sqcup^{\sharp *} \\ & & \quad E^\sharp(p) \sqcup^{\sharp *} \\ & & \quad\quad \bigsqcup^{\sharp *}_{p_1 \mid p_1 \xrightarrow{instr} p} cond^\sharp_1[\![instr]\!](E^\sharp(p_1))\end{array}$$

Par le théorème du transparent 84 , $lfp_{\sqsubseteq^{\sharp *}}(\mathcal{P}^\sharp_{\to,0}) \sqsubseteq^{\sharp *} lfp_{\sqsubseteq^{\sharp *}}(\mathcal{P}^\sharp_{\to,1})$.

Donc (cf. transparent 87) $Env^\sharp_0 \sqsubseteq^{\sharp *} Env^\sharp_1 \hat{=} lfp_{\sqsubseteq^{\sharp *}}(\mathcal{P}^\sharp_{\to,1})$. Donc par le théorème de Cousot (transparent 83) :

Théorème de correction : $Env = lfp_{\subseteq^*}(\mathcal{P}_\to) \subseteq^* \gamma(Env^\sharp_1)$.

Ex: vérifier que $Env^\sharp_1 = Env^\sharp$; en déduire que l'analyse du transparent 80 est correcte.

Réalisation en Caml

Représenter les $\rho^\sharp$ par des listes : `[(V "x", NZ); (V "y", POS)]` représente $\{\mathtt{x} \mapsto \mathtt{NZ}, \mathtt{y} \mapsto +, \mathtt{z} \mapsto \top, \mathtt{t} \mapsto \top, \ldots\}$.

Maintenir une table de hachage `table` représentant $E^\sharp$: si l'entrée p est absente, alors $E^\sharp(p) = \lambda x \cdot \bot$, sinon le $\rho^\sharp$ associé à p par `table` est son $E^\sharp(p)$.

Écrire une fonction `cfg_typ table` $\rho^\sharp$ `graphe sommet` qui met à jour `table` pour calculer le point fixe $Env^\sharp$, sachant que le graphe de contrôle est donnée par `graphe`, et que l'on souhaite ajouter $\rho^\sharp$ à l'environnement abstrait de `sommet` stocké dans `table` et propager les changements subséquents dans `table`. En pseudo-code :

$$
\begin{array}{l}
\texttt{let rec cfg\_type } E^\sharp\ \rho^\sharp\ \mathtt{graphe}\ \mathtt{sommet} = \\
\quad \texttt{if } E^\sharp(\mathtt{sommet}) = \rho^\sharp \\
\quad\quad \texttt{then return;} \\
\quad \texttt{else } E^\sharp(\mathtt{sommet})\mathtt{:=}E^\sharp(\mathtt{sommet}) \sqcup^{\sharp *} \rho^\sharp; \\
\quad\quad\quad \texttt{let } \mathtt{arcs\_sortants} = \{p \mid \mathtt{sommet} \stackrel{instr}{\longrightarrow} p \text{ arc de } \texttt{graphe}\} \\
\quad\quad\quad \texttt{in } \text{pour tout } (\mathtt{sommet} \stackrel{instr}{\longrightarrow} p) \in \mathtt{arcs\_sortants} : \\
\quad\quad\quad\quad \texttt{cfg\_type } E^\sharp\ (cond^\sharp[\![instr]\!]\rho^\sharp)\ \mathtt{graphe}\ p;;
\end{array}
$$

Terminaison

On dit qu'un treillis a la condition de chaîne croissante (ccc) ssi toute chaîne croissante $v_1 \sqsubseteq v_2 \sqsubseteq \ldots$ n'a qu'un nombre fini d'éléments distincts.

$L^\sharp$ (cf. transparent 40) a la ccc : toute chaîne croissante a au plus 6 éléments. Si le programme analysé a au plus n variables $x_1, \ldots, x_n$, on peut supposer sans perte de généralité que $\mathcal{V}ar = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors $\mathcal{E}nv^\sharp \hat{=} \mathcal{V}ar \to L^\sharp$ a la ccc : toute chaîne croissante a au plus $5n + 1$ éléments.
PP $\to \mathcal{E}nv^\sharp$ a la ccc : si le programme analysé a au plus k points de programmes, toute chaîne croissante a au plus $5nk + 1$ éléments.

Théorème : si PP $\to \mathcal{E}nv^\sharp$ a la ccc, alors `cfg_type` termine.
Démonstration : (intuition, dans un cas particulier) Si toute chaîne croissante a au plus N éléments, le point `else` de `cfg_type` ne peut pas être atteint plus de N fois.