Règles de preuve

Jean Goubault-Larrecq

Nous présentons les règles de déduction naturelle en forme de séquents pour la logique classique du premier ordre. La colonne de gauche contient les règles d'introduction, celle de droite les règles d'élimination. Dans ce qui suit, F, G, $\ldots$, sont des formules, Γ, $\ldots$, sont des contextes (des ensembles finis de formules), x, y, $\ldots$, sont des variables d'individu et t, $\ldots$, des termes. Si l'on note A, B, C, $\ldots$, les formules atomiques, une ébauche de grammaire définit :

$$
\begin{array}{lll}
t & ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_n) & f \text{ symbole de fonction } n\text{-aire, } n \geq 0 \\
A & ::= P(t_1, \ldots, t_n) & P \text{ symbole de prédicat } n\text{-aire, } n \geq 0 \\
F & ::= A \mid F_1 \Rightarrow F_2 \mid F_1 \wedge F_1 \mid F_1 \vee F_2 \mid \neg F \mid \forall x \cdot F \mid \exists x \cdot F &
\end{array}
$$

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash F}\,(Ax)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \Rightarrow G}\,(\Rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \Rightarrow G \qquad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}\,(\Rightarrow E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F \qquad \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G}\,(\wedge I) \qquad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_1}\,(\wedge E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_2}\,(\wedge E_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee I_1) \quad \frac{\Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}\,(\vee I_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \vee G \quad \Gamma, F \vdash H \quad \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}\,(\vee E)$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \text{false}}{\Gamma \vdash \neg F}\,(\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash F \qquad \Gamma \vdash \neg F}{\Gamma \vdash \text{false}}\,(\neg E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \text{false}}{\Gamma \vdash F}\,(\text{false}E) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg F}{\Gamma \vdash F}\,(\neg\neg E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[y/x]}{\Gamma \vdash \forall x \cdot F}\,(\forall I) \; (y \notin \text{FV}(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x \cdot F}{\Gamma \vdash F[t/x]}\,(\forall E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash F[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x \cdot F}\,(\exists I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x \cdot F \qquad \Gamma, F[y/x] \vdash G}{\Gamma \vdash G}\,(\exists E) \; (y \notin \text{FV}(\Gamma, G))$$

Rappelons que l'ensemble des *variables libres* $\text{FV}(e)$ pour n'importe quelle expression e est défini par récurrence par:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{FV}(x) = \{x\} & \mathrm{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{FV}(t_n) \\
\mathrm{FV}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{FV}(t_n) & \\
\mathrm{FV}(F_1 \Rightarrow F_2) = \mathrm{FV}(F_1) \cup \mathrm{FV}(F_2) & \mathrm{FV}(F_1 \wedge F_2) = \mathrm{FV}(F_1) \cup \mathrm{FV}(F_2) \\
\mathrm{FV}(F_1 \vee F_2) = \mathrm{FV}(F_1) \cup \mathrm{FV}(F_2) & \mathrm{FV}(\neg F) = \mathrm{FV}(F) \\
\mathrm{FV}(\forall x \cdot F) = \mathrm{FV}(F) \setminus \{x\} & \mathrm{FV}(\exists x \cdot F) = \mathrm{FV}(F) \setminus \{x\} \\
\mathrm{FV}(\Gamma) = \bigcup_{F \in \Gamma} \mathrm{FV}(F) &
\end{array}$$

où la seule ligne non trivial est l'avant-dernière.

En bonus, voici les règles du calcul des séquents, qui sont souvent plus pratiques à utiliser pour chercher des preuves (note: la règle (Cut) de coupure n'est jamais nécessaire dans une preuve, mais on peut l'utiliser si on veut pour modulariser les preuves ou les rendre plus courtes).

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash \Delta, F}\,\mathrm{Ax}$$

$$\frac{\Gamma, F, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \wedge G \vdash \Delta}\,\wedge\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, F \qquad \Gamma \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \wedge G}\,\wedge\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta \qquad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \vee G \vdash \Delta}\,\vee\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, F, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \vee G}\,\vee\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Delta \qquad \Gamma, G \vdash \Delta}{\Gamma, F \Rightarrow G \vdash \Delta} \Rightarrow \mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma, F \vdash \Delta, G}{\Gamma \vdash \Delta, F \Rightarrow G} \Rightarrow \mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, F}{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}\,\neg\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg F}\,\neg\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma, F[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \cdot F \vdash \Delta}\,\forall\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash F[y/x], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x \cdot F, \Delta}\,\forall\mathrm{R} \quad (y \notin \mathrm{FV}(\Gamma, \Delta))$$

$$\frac{\Gamma, F[y/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \cdot F \vdash \Delta}\,\exists\mathrm{L} \quad (y \notin \mathrm{FV}(\Gamma, \Delta)) \qquad \frac{\Gamma \vdash F[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \cdot F, \Delta}\,\exists\mathrm{R}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, F \qquad \Gamma', F \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Cut}$$

(Note: ne pas oublier que Γ et Δ sont des ensembles, donc que $\Gamma, F, F = \Gamma, F$ par exemple. Ceci signifie que:

$$\frac{\Gamma \vdash F[t/x], \exists x \cdot F, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \cdot F, \Delta}$$

est une instance valide de $\exists$R, notamment.)