Sémantique dénotationnelle

Jean Goubault-Larrecq

LSV/CNRS UMR 8643 & ENS Cachan

Une idée simple...

- Choisir un domaine de valeurs Val, suffisamment grand.
- Définir la valeur $[\![M]\!]$ du terme M dans Val, par récurrence structurelle sur M.

Ceci donne une description mathématique simple de la sémantique des programmes, non?

Avant de commencer, réglons quelques problèmes...

Premier problème: quelle est la valeur d'une variable x?

$\Rightarrow$ on a besoin d'un environnement $\rho \in Env =_{def} Var \rightarrow Val$;

Deuxième problème: comment interpréter les opérations sur la mémoire?

$\Rightarrow$ on a besoin d'une mémoire $\mu \in Mem =_{def} Addr \rightarrow Val$;

La sémantique $[\![M]\!]\,\rho\mu$ de M sera paramétrée par ρ, μ et retourne un couple $\mu' \in Mem, V \in Val$.

(À ce stage, vous aurez remarqué que définir $[\![M]\!]\,\rho\mu \in Mem \times Val$ ou définir quand $\rho, \mu \vdash M \Rightarrow \mu', V$, c'est à peu près pareil.

Exercice: quelles sont les différences?)

... et simplifions un peu

Pour simplifier, nous allons considérer un langage plus restreint:

$$
\begin{array}{rcll}
 & & & \text{Termes (fonctions, données)} \\
M, N, P, \ldots & ::= & x & \text{variables (non modifiables)} \\
 & | & M\,N & \text{application de } M \text{ à } N \\
 & | & \texttt{fun}\ x \to M & \text{fonction qui à } x \text{ associe } M
\end{array}
$$

(Modulo quelques différences de notations, c'est la λ-calcul de Church [années 1930].)

On a toujours besoin d'un environnement ρ, mais μ n'est plus nécessaire: on définit $[\![M]\!]\,\rho \in Val$.

Allons-y donc!

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!]\,\rho &= \rho(x) && (1)\\
[\![MN]\!]\,\rho &= f([\![N]\!]\,\rho) \quad \text{où } f = [\![M]\!]\,\rho && (2)\\
[\![\lambda x \cdot M]\!]\,\rho &= \text{fonction } V \mapsto [\![M]\!]\,(\rho[x \mapsto V]) && (3)
\end{aligned}
$$

Vous vous souvenez tous que ça pose un problème, non?

(voir dernier cours)

Nous avions éludé la difficulté en modélisant les fonctions par des clôtures. Ceci est insatisfaisant:

- solution inélégante: le domaine sémantique Val fait appel à la syntaxe $(Terme)$;
- ne permet pas de considérer les fonctions informatiques ... comme des fonctions mathématiques (un comble!)

La théorie des domaines

Idée de base: trouver un domaine Val tel que $(Val \to Val)$ soit inclus dans Val.

Problème: ça n'existe pas (Cantor).

Correction: un domaine sera un ensemble ayant une certaine structure, et l'espace $[Val \to Val]$ des fonctions respectant la structure seront incluses dans Val.

Par exemple: domaine = espace topologique, $[Val \to Val] = \{$fonctions continues$\}$. Plus de problème de cardinalité!

Exercice: si $Val = \mathbb{R}$, montrer que le cardinal de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est celui de $\mathbb{R}$ exactement, et pas plus gros.

L'idée de D. Scott

Domaine = dcpo ("directed complete partial order").

Fonctions considérées = fonctions continues.

Définition: Soit $(Val, \leq)$ ordonné. $D \subseteq Val$ est *dirigé* ssi $D \neq \emptyset$ et $\forall d, d' \in D \cdot \exists d'' \in D \cdot d, d' \leq d''$.

$(Val, \leq)$ est un *dcpo* ssi tout D dirigé a un sup.

$f : Val \to Val$ est *continue* ssi f préserve les sups de familles dirigées.

Exercices: si f est continue, alors f est *monotone*: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Si B dcpo, $[A \to B]$ muni de l'ordre $f \leq g$ ssi $\forall x \cdot f(x) \leq g(x)$ est un dcpo.

Si A, B dcpos, $A \times B$ dcpo.

La fonction $App : (f, x) \in [A \to B] \times A \mapsto f(x) \in B$ est continue.

La fonction $Cur : f \in [A \times B \to C] \mapsto g \in [A \times [B \to C]]$ telle que $g(x)(y) = f(x, y)$ est continue.

Le théorème de Scott

Théorème: Pour tout dcpo D_0, il existe un dcpo D contenant D_0 et tel que $D \cong [D \to D]$.

Preuve: technique... limite projective d'une chaîne de dcpos dont le premier est D_0. (Voir cours de logique et informatique, deuxième semestre!)

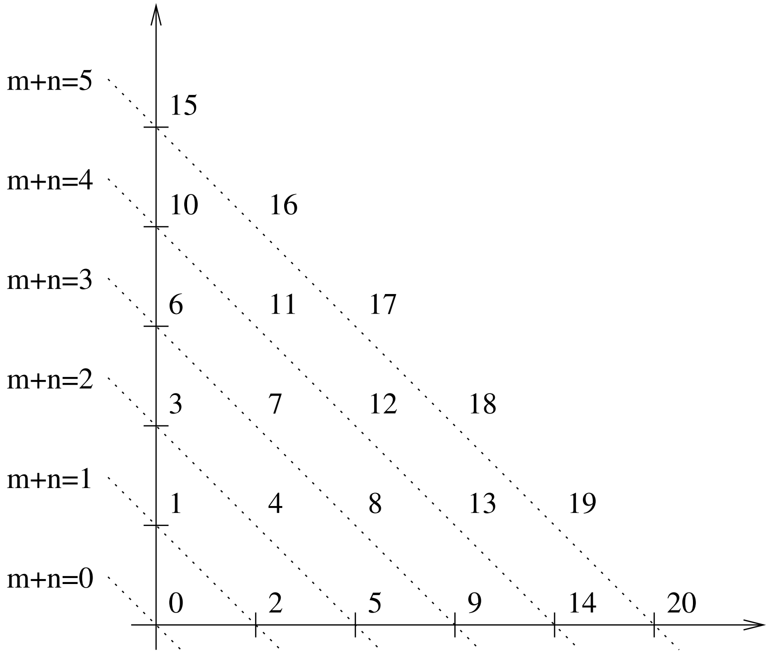
Dans ce cadre, $[\![M]\!]\,\rho$ a un sens... mais le domaine des valeurs est tordu.

Un modèle plus simple: le modèle $\mathbb{P}\omega$ de Plotkin

$\mathbb{P}\omega$ est le dcpo des parties de $\mathbb{N}$, ordonné par inclusion $\subseteq$.

On utilise quelques astuces pour voir que $[\mathbb{P}\omega \to \mathbb{P}\omega]$ s'injecte naturellement dans $\mathbb{P}\omega$...

D'abord, on peut coder toute paire d'entiers m, n comme un entier $\langle m, n\rangle$:



Exercice: écrire une formule explicite calculant $\langle m, n\rangle$, et une autre retrouvant m et n à partir de $\langle m, n\rangle$.

Ensuite, on peut coder tout ensemble fini $e = \{n_1, \ldots, n_k\}$ d'entiers par le nombre binaire $[e] = \sum_{i=1}^{k} 2^{n_i}$:

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
{1, 3, 4, 7, 9, 10} =	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	= 1690

Réciproquement, on note e_m l'ensemble tel que $[e_m] = m$.

Enfin, toute fonction continue de $\mathbb{P}\omega$ vers $\mathbb{P}\omega$ est déterminée de façon unique par sa valeur sur les ensembles finis d'entiers:

$$f(E) = \sup_{e \text{ fini } \subseteq E} f(e)$$

(Note: le sup est juste l'union $\bigcup$.)

On code donc $f \in [\mathbb{P}\omega \to \mathbb{P}\omega]$ par

$$r(f) \in \mathbb{P}\omega = \{\langle m, n\rangle \mid n \in f(e_m)\}$$

Étant donné $E \in \mathbb{P}\omega$, on peut retrouver la fonction $f = i(E)$ correspondante par:

$$i(E)(m) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists e \text{ fini } \subseteq m \cdot \langle [e], n\rangle \in E\}$$

Exercice: Vérifier que $i \circ r$ est l'identité sur $[\mathbb{P}\omega \to \mathbb{P}\omega]$, et que i et r sont continues.

La fonction r permet de projeter $[\mathbb{P}\omega \to \mathbb{P}\omega]$ sur $\mathbb{P}\omega$, et i injecte $\mathbb{P}\omega$ dans $[\mathbb{P}\omega \to \mathbb{P}\omega]$.

On peut donc définir:

$$
\begin{aligned}
[\![x]\!]\,\rho &= \rho(x) && (4)\\
[\![MN]\!]\,\rho &= f([\![N]\!]\,\rho) \quad \text{où } f = i([\![M]\!]\,\rho) && (5)\\
[\![\lambda x \cdot M]\!]\,\rho &= r(\text{fonction } V \mapsto [\![M]\!]\,(\rho[x \mapsto V])) && (6)
\end{aligned}
$$

Exercice: Vérifier que $[\![(\lambda x \cdot M)N]\!]\,\rho = [\![M[x := N]]\!]\,\rho$.
Par contre, en général $[\![\lambda x \cdot Mx]\!]\,\rho \neq [\![M]\!]\,\rho$, même lorsque x n'apparaît pas libre dans M.