Langages Formels

Licence Informatique – ENS Cachan

Examen du 27 mai 2009

durée 3 heures

Document autorisé : polycopié du cours.

Toutes les réponses devront être correctement justifiées.

Le chiffre en regard d'une question est une indication sur sa difficulté ou sa longueur.

1 Addition d'Avizienis

Soit $k > 1$ un entier. Un système d'Avizienis est un procédé de numération en base k qui utilise des chiffres positifs et négatifs. De façon générale, si $D \subseteq \mathbb{Z}$ est un ensemble fini de chiffres, à chaque mot $u = a_n \cdots a_1 a_0 \in D^*$ (avec $a_i \in D$) on associe sa *valeur*, i.e., l'entier représenté par u en base k :

$$\mathrm{val}_k(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \ .$$

Pour plus de lisibilité dans l'écriture d'un mot on utilisera de préférence $\bar{a}$ à la place du chiffre $-a$. Par exemple, $\mathrm{val}_2(10\bar{1}) = 3$ et $\mathrm{val}_{10}(3\bar{3}) = 27$.

Avec $A = \{0, \ldots, k-1\}$, les mots de $X = (A \setminus \{0\})A^* \cup \{\varepsilon\}$ correspondent à l'écriture usuelle des entiers en base k en commençant par le chiffre de poids fort. Cette écriture étant unique, l'application $\mathrm{val} : X \to \mathbb{N}$ est une bijection.

Soit $h = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ et $B = \{-h, \ldots, 0, \ldots, h\}$. Le système de numération d'Avizienis correspond aux mots de B^* (on peut éventuellement se restreindre à ceux qui ne commencent pas par 0). Dans ce système, la représentation d'un entier n'est pas unique. Par exemple, $\mathrm{val}_4(12\bar{2}) = \mathrm{val}_4(112)$.

[3] **a)** Montrer qu'il existe une fonction séquentielle $f : A^* \to B^*$ qui préserve les valeurs, i.e., telle que $\mathrm{val}_k(u) = \mathrm{val}_k(f(u))$ pour tout $u \in A^*$.

[1] **b)** Soit $g : B^* \to A^*$ la fonction qui traduit une représentation d'Avizienis en la représentation usuelle : $g(B^*) = X$ et pour tout $u \in B^*$ on a $\mathrm{val}_k(u) = \mathrm{val}_k(g(u))$.
La fonction g est-elle séquentielle ?

[3] **c)** On considère maintenant l'alphabet $C = \{-2h, \ldots, 0, \ldots, 2h\}$. Montrer qu'il existe une fonction séquentielle $f : C^* \to B^*$ qui préserve les valeurs, i.e., telle que $\mathrm{val}_k(u) = \mathrm{val}_k(f(u))$ pour tout $u \in C^*$.
Indication: On pourra prendre comme ensemble d'états $Q = B^2 \setminus \{\bar{h}\bar{h}, hh\}$.

[1] **d)** Existe-t-il une fonction séquentielle $g : (B \times B)^* \to B^*$ qui réalise l'addition dans le système d'Avizienis en commençant par le bit de poids fort, i.e., telle que pour tout $w = (a_n, b_n) \cdots (a_0, b_0) \in (B \times B)^*$ on a $\mathrm{val}_k(g(w)) = \mathrm{val}_k(a_n \cdots a_0) + \mathrm{val}_k(b_n \cdots b_0)$?

2 Unaire ou binaire

Soit $u \in \{0,1\}^*$. On note $\overline{u}^2 \in \mathbb{N}$ l'entier qui s'écrit u en binaire avec le bit de poids fort à gauche. Par exemple, $\overline{1100}^2 = 12$. Pour $K \subseteq \mathbb{N}$, on note

$$\begin{aligned} \text{unary}(K) &= \{v \in \{1\}^* \mid |v| \in K\} \\ \text{binary}(K) &= \{u \in \{0,1\}^* \mid \overline{u}^2 \in K\} \ . \end{aligned}$$

[1] **a)** La proposition suivante est-elle vraie ou fausse?

(i) Pour tout $K \subseteq \mathbb{N}$, si binary(K) est reconnaissable alors unary(K) est reconnaissable.

[3] **b)** La proposition suivante est-elle vraie ou fausse?

(ii) Pour tout $K \subseteq \mathbb{N}$, si unary(K) est reconnaissable alors binary(K) est reconnaissable.

3 Permutation et Conjugaison

Soit Σ un alphabet et $L \subseteq \Sigma^*$ un langage. On définit

$$\begin{aligned} \text{permut}(L) &= \{v \in \Sigma^* \mid \exists u \in L,\, \forall a \in \Sigma,\, |v|_a = |u|_a\} \\ \text{conjug}(L) &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u,v \in \Sigma^*,\, uv \in L \text{ et } w = vu\} \ . \end{aligned}$$

[1] **a)** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

(i) Pour tout $L \subseteq \Sigma^*$, si L est reconnaissable alors permut(L) est reconnaissable.
(ii) Pour tout $L \subseteq \Sigma^*$, si L est algébrique alors permut(L) est algébrique.

[3] **b)** Montrer que pour tout $L \subseteq \Sigma^*$, si L est reconnaissable alors conjug(L) est reconnaissable.

[2] **c)** Soit $L = \{a^n b^n c^p d^p \mid n,p \geq 0\}$. Montrer que conjug($L$) est algébrique.

[3] **d)** Soit $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$. Le langage conjug($L$) est-il linéaire?

[5] **e)** La proposition suivante est-elle vraie ou fausse?

(iii) Pour tout $L \subseteq \Sigma^*$, si L est algébrique alors conjug(L) est algébrique.