La logique

Étude du raisonnement (des démonstrations) : objet qui permet de juger de la vérité d'une proposition

Quel rapport avec l'informatique ?

1. Les ordinateurs sont des machines à vérité
2. La vérification et la recherche de démonstrations
3. Démontrer la correction d'algorithmes et de programmes

Logique = langage, démonstration, algorithme, modèle, ensemble
Informatique = langage, algorithme, information, machine

La notion de définition inductive

Deux théorèmes du point fixe

$\leq$ faiblement complète, un minimum m et f continue alors f a un point fixe : $lim_i\ (f^i\ m)$

$\leq$ fortement complète et f croissante alors f a un point fixe : $inf\ \{c \mid fc \leq c\}$

Exemple

$$\frac{}{0}$$

$$\frac{n}{n+2}$$

P n'est pas le seul ensemble qui contient 0 et qui est clos par la fonction $n \mapsto n+2$
Mais c'est le plus petit
Point fixe de (croissante et continue) $F(A) = \{0\} \cup \{x+2 \mid x \in A\}$
Intersection de tous les ensembles qui contiennent 0 et qui sont clos par $n \mapsto n+2$
Réunion de $\varnothing$, $F(\varnothing)$, $F(F(\varnothing))$...
À généraliser

La notion de dérivation

$x \in B$ si $x \in F^k(\varnothing)$ pour un certain k

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{0}\,z}{2}\,p}{4}\,p}{6}\,p$$

La notion de langage

Un langage (sans variables) : ensemble de symboles, chacun muni d'un nombre entier appelé son arité ou nombre d'arguments

L'ensemble des expressions du langage est l'ensemble d'arbres défini inductivement par la règle

$$\frac{t_1 \qquad \dots \qquad t_n}{f(t_1, \dots, t_n)} \text{ si } f \text{ est un symbole d'arité } n$$

Exemple : 0, S, $+$, $\times$, *pair*, *impair*, $\Rightarrow$

$$impair(S(S(S(0)))) \Rightarrow pair(S(S(S(S(0)))))$$

Variables et symboles lieurs

L'arité d'un symbole est un n-uplet $\langle k_1, ..., k_n \rangle$
Le symbole a n arguments, il lie k_1 variables dans le premier, ..., k_n variables dans le $n^{\text{ème}}$
Exemple : $\forall$ a l'arité $\langle 1 \rangle$
Un ensemble de symboles et un ensemble infini de variables

Les expressions sont définies inductivement par les règles :

- les variables sont des expressions
- si f est un symbole d'arité $\langle 1, 3 \rangle$, t et u sont des expressions, w, x, y, z sont des variables alors $f(w\ t, x\ y\ z\ u)$ est une expression (à généraliser)

Les langages à plusieurs sortes d'objets

0, S, $+$, $\times$, $pair$, $impair$, $\Rightarrow$, $\forall$

Empêcher $0 \Rightarrow 0$

Distinguer 0, $S(0)$, $S(x)$... termes
de $pair(0)$, $impair(0)$, $\forall x\ (pair(x))$... propositions

Mais aussi peut-être les termes de vecteurs, les termes de scalaires...

Les langages à plusieurs sortes d'objets

Un ensemble de sortes $\{Terme, Prop\}$ plus généralement $\mathcal{S}$

L'arité d'un symbole est un $n+1$-uplet de sortes $\langle s_1, ..., s_n, s' \rangle$

Si t_1 terme de sorte s_1, t_2 terme de sorte s_2, ..., t_n terme de sorte s_n et f d'arité $\langle s_1, ..., s_n, s' \rangle$ alors $f(t_1, ..., t_n)$ de sorte s'

Mélanger : lieurs et plusieurs sortes