Logique

Résumé des épisodes précédents

Les concepts fondamentaux de la logique

Les théorèmes de Church et de Gödel

La démonstration automatique : le calcul des séquents

L'équivalence entre le calcul des séquents et la déduction naturelle

L'élimination des coupures

Les démonstration d'équivalence (en général)

On veut montrer

$$\Gamma \vdash A \text{ démontrable en calcul des séquents}$$
$$\text{si et seulement si}$$
$$\Gamma \vdash A \text{ démontrable en déduction naturelle}$$

Deux méthodes

- (méthode syntaxique) définir deux algorithmes de traduction
- (méthode sémantique) montrer

$$\Gamma \vdash A \text{ démontrable en calcul des séquents}$$
$$\text{si et seulement si}$$
$$\Gamma \vdash A \text{ valide dans tous les modèles}$$

I. Le calcul des séquents (sans la règle de coupure)

Une, plusieurs ou zéro propositions à droite

Les séquents ont la forme

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_p$$

En cas de doute, toujours possible de revenir au séquent $A_1, \ldots, A_n, \neg B_1, \ldots, \neg B_p \vdash \bot$

- Virgule à gauche : une forme de conjonction (équivalent d'avoir deux hypothèses ou leur conjonction)
  Virgule à droite : une forme de disjonction
- $\top$ à gauche inutile : $\Gamma, \top \vdash \Delta$ démontrable ssi $\Gamma \vdash \Delta$ démontrable
  De même, $\bot$ à droite inutile : $\Gamma \vdash \bot, \Delta$ démontrable ssi $\Gamma \vdash \Delta$ démontrable
  (moyen mnémotechnique : $\top$ neutre de la conjunction, $\bot$ de la disjonction)
- Γ vide : comme $\Gamma = \top$
  Δ vide : comme $\Delta = \bot$

Les règles logiques à droite

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ \Rightarrow\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{-droite}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\ A, \Delta}\ \forall\text{-droite} \quad \text{si } x \text{ n'apparaît pas libre dans } \Gamma\Delta$$

$$\frac{\Gamma \vdash (t/x)A, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\ A, \Delta}\ \exists\text{-droite}$$

Les règles logiques à gauche

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, (t/x)A \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\ A \vdash \Delta}\ \forall\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\ A \vdash \Delta}\ \exists\text{-gauche} \quad \text{si } x \text{ n'apparaît pas libre dans } \Gamma\Delta$$

Axiome et contractions

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{axiome}$$

$$\dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ \text{contraction-gauche}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ \text{contraction-droite}$$

II. Du calcul des séquents vers la déduction naturelle

Le théorème

Si $\Gamma \vdash A$ démontrable en calcul des séquents,
alors $\Gamma \vdash A$ démontrable en déduction naturelle

Équivalent

Si $\Gamma \vdash A$ démontrable en calcul des séquents,
alors $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ démontrable en déduction naturelle

($\neg$-intro, puis tiers exclu)

Plus généralement

Si $\Gamma \vdash \Delta$ démontrable en calcul des séquents,
alors $\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ démontrable en déduction naturelle

Pourquoi ce n'est pas trivial

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q, R \vdash P}\ \text{axiome}}{P \wedge Q, R \vdash P}\ \wedge\text{-gauche}}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P}\ \wedge\text{-gauche}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash \neg P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash (P \wedge Q) \wedge R}\ \text{axiome}}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-élim}}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash P}\ \wedge\text{-élim}}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

Pourquoi ce n'est pas trivial

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P, Q, R \vdash P}\ \text{axiome}}{\color{red}{P \wedge Q, R \vdash P}}\ \wedge\text{-gauche}}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P}\ \wedge\text{-gauche}$$

$$\dfrac{\overline{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash \neg P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash (P \wedge Q) \wedge R}\ \text{axiome}}{\color{red}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash P \wedge Q}}\ \wedge\text{-élim}}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash P}\ \wedge\text{-élim}}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

Pourquoi ce n'est pas trivial

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P, Q, R \vdash P}\ \text{axiome}}{P \land Q, R \vdash P}\ \land\text{-gauche}}{(P \land Q) \land R \vdash P}\ \land\text{-gauche}$$

$$\dfrac{\overline{(P \land Q) \land R, \neg P \vdash \neg P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{(P \land Q) \land R, \neg P \vdash (P \land Q) \land R}\ \text{axiome}}{(P \land Q) \land R, \neg P \vdash P \land Q}\ \land\text{-élim}}{(P \land Q) \land R, \neg P \vdash P}\ \land\text{-élim}}{(P \land Q) \land R, \neg P \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

Définir la traduction par récurrence sur la structure de la démonstration ?

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge\text{-gauche}$$

Hypothèse de récurrence

$$\dfrac{\pi'}{\Gamma, A, B, \neg\Delta \vdash \bot}$$

Comment obtenir une démonstration en déduction naturelle de $\Gamma, A \wedge B, \neg\Delta \vdash \bot$?
Pas simplement utiliser la démonstration π' (traduction locale), mais la transformer

Transformer une démonstration en déduction naturelle de $\Gamma, A, B, \neg\Delta \vdash \perp$ en une démonstration de $\Gamma, A \wedge B, \neg\Delta \vdash \perp$

(1) Une démonstration de $\Gamma, A \wedge B, A, B, \neg\Delta \vdash \perp$
Abondance de biens ne nuit pas
Lemme d'affaiblissement : si $\Gamma \vdash B$ a une démonstration en déduction naturelle, alors $\Gamma, A \vdash B$ aussi (simple récurrence)

(2) Désormais A et B hypothèses redondantes dans $\Gamma, A \wedge B, A, B, \neg\Delta \vdash \perp$
Car $\Gamma, A \wedge B, \neg\Delta \vdash A$ et $\Gamma, A \wedge B, \neg\Delta \vdash B$ démontrables (règle axiome sur une grosse proposition : $A \wedge B$ et règle $\wedge$-élim)
Lemme du lemme : Si $\Gamma, A \vdash B$ démontrable en déduction naturelle, mais $\Gamma \vdash A$ démontrable, alors l'hypothèse A est inutile : $\Gamma \vdash B$ démontrable

Le lemme du lemme

Si $\Gamma \vdash A$ a une démonstration π et $\Gamma, A \vdash B$ une démonstration π', alors $\Gamma \vdash B$ a une démonstration

Une première démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow\text{-intro} \qquad \dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}\Rightarrow\text{-élim}$$

Mais un peu bête d'introduire une implication pour l'éliminer juste après

Si $\Gamma \vdash A$ a une démonstration π et $\Gamma, A \vdash B$ une démonstration π', alors $\Gamma \vdash B$ a une démonstration

Supprimer A dans tous les séquents de π'
La démonstration reste correcte
Sauf axiome $\Gamma, A, \Gamma' \vdash A$ qui devient $\Gamma, \Gamma' \vdash A$
Utiliser π (+ affaiblissement) à la place de l'axiome

Démonstration par récurrence sur la structure de π', un seul cas non trivial : l'axiome

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q, R \vdash P}\ \text{axiome}}{P \wedge Q, R \vdash P}\ \wedge\text{-gauche}}{(P \wedge Q) \wedge R \vdash P}\ \wedge\text{-gauche}$$

Hypothèse de récurrence

$$\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R, \neg P \vdash \neg P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q, R, \neg P \vdash P \wedge Q}\ \text{axiome}}{P \wedge Q, R, \neg P \vdash P}\ \wedge\text{-élim}}{P \wedge Q, R, \neg P \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

Affaiblissement

$$\dfrac{\dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R, P \wedge Q, R, \neg P \vdash \neg P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R, P \wedge Q, R, \neg P \vdash P \wedge Q}\ \text{axiome}}{(P \wedge Q) \wedge R, P \wedge Q, R, \neg P \vdash P}\ \wedge\text{-élim}}{(P \wedge Q) \wedge R, P \wedge Q, R, \neg P \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

Lemme du lemme (deux fois)

$$\dfrac{\dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash \neg P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash (P \wedge Q) \wedge R}\ \text{axiome}}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-élim}}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash P}\ \wedge\text{-élim}}{(P \wedge Q) \wedge R, \neg P \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

III. De la déduction naturelle vers le calcul des séquents

Le théorème

Si $\Gamma \vdash A$ démontrable en déduction naturelle,
alors $\Gamma \vdash A$ démontrable en calcul des séquents

À nouveau, par récurrence sur la structure des démonstrations (en déduction naturelle)
À nouveau, transformer les démonstrations plutôt que simplement les utiliser

Traduire les éliminations

Comment traduire une démonstration de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A}\ \wedge\text{-élim}$$

?

Hypothèse de récurrence

$$\dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

Commment transformer π' en une démonstration de $\Gamma \vdash A$?

À nouveau un lemme du lemme ferait l'affaire car $\Gamma, A \wedge B \vdash A$ démontrable en calcul des séquents

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash A}\ \text{axiome}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A}\ \wedge\text{-gauche}$$

De $\Gamma \vdash A \wedge B$ et $\Gamma, A \wedge B \vdash A$ à $\Gamma \vdash A$?

Un autre exemple

Comment traduire une démonstration de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash B \Rightarrow A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A} \Rightarrow\text{-élim}$$

?
Hypothèse de récurrence : π'_1 démonstration en calcul des séquents de $\Gamma \vdash B \Rightarrow A$ et π'_2 de $\Gamma \vdash B$

Commment obtenir une démonstration de $\Gamma \vdash A$?

Un lemme du lemme suffit car $\Gamma, B \Rightarrow A, B \vdash A$ démontrable en calcul des séquents

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \vdash B, A}\text{axiome} \quad \dfrac{}{\Gamma, B, A \vdash A}\text{axiome}}{\Gamma, B \Rightarrow A, B \vdash A} \Rightarrow\text{-gauche}$$

Idem pour toutes les autres règles d'élimination

Un lemme du lemme en calcul des séquents ?

Si $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma, A \vdash \Delta$ ont des démonstrations en calcul des séquents,
alors $\Gamma \vdash \Delta$ aussi

Mais plus difficile qu'en déduction naturelle, car, dans la seconde démonstration, A ne va pas attendre bien sagement d'être utilisée par la règle axiome

Une solution

Ajouter au calcul des séquents la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\text{ coupure}$$

Le calcul des séquents avec la règle de coupure (ou simplement le calcul des séquents)

- Traduction simple des démonstrations de la déduction naturelle en calcul des séquents
- Complique la traduction des démonstrations du calcul des séquents en déduction naturelle (une règle de plus) mais pas beaucoup : il y a déjà un lemme du lemme en déduction naturelle

Oui, mais...

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{coupure}$$

ruine tous les avantages du calcul des séquents en démonstration automatique

IV. Le théorème d'élimination des coupures

Deux formulations du théorème

Si $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma, A \vdash \Delta$ ont une démonstration en calcul des séquents sans coupures, alors $\Gamma \vdash \Delta$ aussi

Si $\Gamma \vdash \Delta$ a une démonstration dans le calcul des séquents, alors il a aussi une démonstration sans coupures

Si $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma, A \vdash \Delta$ ont une démonstration dans le calcul des séquents sans coupures, alors $\Gamma \vdash \Delta$ aussi

Plus généralement
Si $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma', A \vdash \Delta'$ ont une démonstration dans le calcul des séquents sans coupures, alors $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ aussi

Un cas typique

$$\dfrac{\dfrac{\rho_1}{\Gamma \vdash B, \Delta} \quad \dfrac{\rho_2}{\Gamma \vdash C, \Delta}}{\Gamma \vdash B \wedge C, \Delta} \wedge\text{-droite} \qquad \dfrac{\dfrac{\rho_3}{\Gamma', B, C \vdash \Delta'}}{\Gamma', B \wedge C \vdash \Delta'} \wedge\text{-gauche}$$

- Hypothèse de récurrence : une démonstration de $\Gamma, \Gamma', C \vdash \Delta, \Delta'$
- Hypothèse de récurrence : une démonstration de $\Gamma, \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta, \Delta'$
- Contractions $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$

Principalement récurrence sur A (B plus petite que $B \wedge C$, C plus petite que $B \wedge C$)

Si $\Gamma \vdash A, \Delta$ et $\Gamma', A \vdash \Delta'$ ont une démonstration dans le calcul des séquents sans coupures, alors $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ aussi

Plus généralement
Si $\Gamma \vdash A^n, \Delta$ et $\Gamma', A^m \vdash \Delta'$ ont une démonstration dans le calcul des séquents sans coupures, alors $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ aussi

En fait, une récurrence double

Lexicographiquement d'abord sur A puis sur la somme des tailles des deux démonstrations

$$\dfrac{\dfrac{\rho_1}{\Gamma \vdash B, (B \wedge C)^{n-1}, \Delta} \quad \dfrac{\rho_2}{\Gamma \vdash C, (B \wedge C)^{n-1}, \Delta}}{\Gamma \vdash B \wedge C, (B \wedge C)^{n-1}, \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\rho_3}{\Gamma', (B \wedge C)^{m-1}, B, C \vdash \Delta'}}{\Gamma', (B \wedge C)^{m-1}, B \wedge C \vdash \Delta'}$$

- $(\rho_1$ et $\pi')$: ρ_1' démonstration de $\Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'$
- $(\rho_2$ et $\pi')$: ρ_2' démonstration de $\Gamma, \Gamma' \vdash C, \Delta, \Delta'$
- $(\rho_3$ et $\pi)$: ρ_3' démonstration de $\Gamma, \Gamma', B, C \vdash \Delta, \Delta'$
- $(\rho_1'$ et ρ_3' + contractions) : $\Gamma, \Gamma', C \vdash \Delta, \Delta'$
- $(\rho_2'$ et cette démonstration + contractions) : $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$

Et aussi beaucoup de cas ennuyeux où une règle n'est pas appliquée à A

$$\dfrac{\dfrac{\rho_1}{\Gamma \vdash B, (B \wedge C)^{n-1}, \Delta} \quad \dfrac{\rho_2}{\Gamma \vdash C, (B \wedge C)^{n-1}, \Delta}}{\Gamma \vdash B \wedge C, (B \wedge C)^{n-1}, \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\rho_3}{\Gamma'', (t/x)D, (B \wedge C)^m \vdash \Delta'}}{\Gamma'', \forall x\ D, (B \wedge C)^m \vdash \Delta'}$$

- (π et ρ_3) : $\Gamma, \Gamma'', (t/x)D \vdash \Delta, \Delta'$
- $\forall$-gauche : $\Gamma, \Gamma'', \forall x\ D \vdash \Delta, \Delta'$

Corollaire

Si $\Gamma \vdash \Delta$ a une démonstration dans le calcul des séquents, alors il a aussi une démonstration sans coupures

On élimine les coupures une à une en appliquant le théorème (en commençant par les plus internes)

Et aussi une démonstration directe

Si $\Gamma \vdash \Delta$ a une démonstration dans le calcul des séquents, alors il a aussi une démonstration sans coupures

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\rho_1}{\Gamma \vdash B, \Delta} \quad \dfrac{\rho_2}{\Gamma \vdash C, \Delta}}{\Gamma \vdash B \wedge C, \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\rho_3}{\Gamma, B, C \vdash \Delta}}{\Gamma, B \wedge C \vdash \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta} \text{coupure}$$

Au lieu de l'hypothèse de récurrence, deux coupures plus petites

La récurrence devient un argument de terminaison

Le théorème d'élimination des coupures et la cohérence

Le théorème d'élimination des coupures de Gentzen (1934) est antérieur aux premières tentatives de logiciels de démonstration automatique
Un corollaire : la cohérence de la logique des prédicats : $\vdash$ (et $\vdash \bot$) non démontrables

En calcul des séquents avec la règle de coupure, rien n'empêche d'imaginer

$$\dfrac{\dfrac{\cdots}{\vdash A} \quad \dfrac{\cdots}{A \vdash}}{\vdash}\text{coupure}$$

En calcul des séquents sans la règle de coupure, impossible car aucune règle ne peut s'appliquer à $\vdash$ (ou à $\vdash \bot$)

Le théorème d'élimination des coupures et la cohérence

Pour la théorie vide, pas très intéressant, mais peut se généraliser à d'autres théories

À nouveau : deux méthodes pour démontrer la cohérence d'une théorie : construire un modèle ou donner un algorithme d'élimination des coupures

La prochaine fois

Des théories décidables