Logique

Résumé des épisodes précédents

La notion de définition inductive

La notion de langage

La logique des prédicats

- Les langages de la logique des prédicats
- Les règles de la déduction naturelle
- La substitution
- La notion de démonstration

I. Les langages de la logique des prédicats

Les langages de la logique des prédicats

La logique des prédicats n'est pas une théorie, comme l'arithmétique ou la géométrie

C'est une logique : un cadre dans lequel il est possible de définir plusieurs théories

Chaque théorie a son langage propre

Les sortes

Ensemble $\mathcal{S}$ de sortes de termes (souvent une seule)
Par exemple : *nat*

Une sorte supplémentaire commune à tous les langages : *Prop*

Les symboles

- Les symboles de fonction f d'arité $\langle s_1, \ldots, s_n, s' \rangle$
  Par exemple : 0, S, $+$, $\times$
- Les symboles de prédicat P d'arité $\langle s_1, \ldots, s_n, Prop \rangle$ (notée $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$)
  Par exemple : $=$, *pair*, *impair*
- Les symboles communs à tous les langages
  - $\top$ et $\bot$ d'arité $\langle Prop \rangle$
  - $\neg$ d'arité $\langle Prop, Prop \rangle$
  - $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$ d'arité $\langle Prop, Prop, Prop \rangle$
  - $\forall_s$ et $\exists_s$ d'arité $\langle \langle s, Prop \rangle, Prop \rangle$

Seuls symboles lieurs $\forall_s$ et $\exists_s$

Un exemple

$$\forall x \ (impair(x) \Rightarrow pair(S(x)))$$

II. Les règles de déduction naturelle

Une première (et presque bonne) idée

Un sous-ensemble de l'ensemble des propositions
inductivement défini par des règles de déduction

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$

Mais...

Pour démontrer $A \Rightarrow B$: supposons A et démontrons B

Non seulement la proposition à démontrer varie, mais aussi l'ensemble d'hypothèses

Un séquent $\Gamma \vdash A$ formé d'un ensemble d'hypothèses Γ et d'une conclusion A

Les règles de la Déduction naturelle

Un sous-ensemble de l'ensemble des séquents inductivement défini par des règles de déduction

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash A} \text{si } A \in \Gamma$$

La classification des règles

La plupart des règles concernent un symbole (connecteur ou quantificateur) unique

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\text{-intro}$$

Classification des règles en fonction du symbole concerné

Conclusion ou prémisse : introduction / élimination
fabriquer / utiliser

Quelques exceptions

Les règles une par une : $\top$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top\text{-intro}$$

Pas de règle d'élimination

Les règles une par une : $\perp$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}\ \perp\text{-élim}$$

Pas de règle d'introduction

Les règles une par une : $\wedge$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge\text{-élim1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge\text{-élim2}$$

Les règles une par une : $\vee$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{-intro1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{-intro2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \vee\text{-élim}$$

Démonstration par cas

Les règles une par une : $\Rightarrow$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow\text{-élim}$$

Contexte, raisonnement hypothético-déductif

Les règles une par une : $\neg$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}$$

Règles impures ($\bot$)
Possibilité de considérer $\neg A$ comme $A \Rightarrow \bot$

Les règles une par une : $\forall$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\ A}\ \forall\text{-intro si } x \notin VL(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\ A}{\Gamma \vdash (t/x)A}\ \forall\text{-élim}$$

Règle d'introduction : généricité

« Nous voulons montrer $\forall x\ (pair(x) \Rightarrow pair(x))$. Considérons un entier x et montrons $pair(x) \Rightarrow pair(x)$ »

~~« Considérons un entier 7... »~~

x n'apparaît pas (libre) dans Γ

Règle d'élimination : substitution

$(7/x)(pair(x) \Rightarrow pair(x)) = pair(7) \Rightarrow pair(7)$

Les règles une par une : $\exists$

$$\frac{\Gamma \vdash (t/x)A}{\Gamma \vdash \exists x \ A} \ \exists\text{-intro}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x \ A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \ \exists\text{-élim si } x \notin VL(\Gamma, B)$$

Les règles une par une

$$\frac{}{\Gamma \vdash A} \text{axiome if } A \in \Gamma$$

Notion de contexte, raisonnement hypothético-déductif

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \text{tiers exclu}$$

Quelques variantes

À l'intérieur de la Déduction naturelle

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B \quad \Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \wedge\text{-élim}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ \text{tiers exclu}$$

Mais aussi des règles complètement différentes : le Calcul des séquents

III. La substitution

$\forall$-élim et $\exists$-intro : une opération annexe : la substitution $(t/x)u$
L'opération qui donne son sens au mot variable
Les langages de la logique des prédicats et tous les autres langages

Définition simple pour les langages sans symboles lieurs de variables

- $(t/x)x = t$
- $(t/x)y = y$ si $x \neq y$
- $(t/x)(f(u_1, ..., u_n)) = f((t/x)u_1, ..., (t/x)u_n)$

Dans les langages avec des symboles lieurs de variables

$(4/x)(\forall x\ P(x)) = \forall x\ P(4)$ ou $\forall x\ P(x)$?

Règle 1 : ne substituer que les variables libres

Première tentative :

- $\langle t/x\rangle(\forall x\ A) = \forall x\ A$
- $\langle t/x\rangle(\forall y\ A) = \forall y\ (\langle t/x\rangle A)$ si $x \neq y$

Exemples

$$\langle 4/y\rangle(\forall x\ P(x+y)) = \forall x\ P(x+4)$$

$$\langle z/y\rangle(\forall x\ P(x+y)) = \forall x\ P(x+z)$$

$$\langle x/y\rangle(\forall x\ P(x+y)) = \forall x\ P(x+x)$$

Règle 2 : éviter les captures de variables

$$(x/y)(\forall x\ P(x+y)) = (x/y)(\forall w\ P(w+y)) = \forall w\ P(w+x)$$

Renommer la variable liée x en w

Pourquoi w plutôt que v ?
C'est équivalent (variable liée = variable muette)

Équivalence alphabétique (α-équivalence)

L'équivalence alphabétique

- $\forall x \ A \sim \forall y \ B$ si pour toute variable z qui n'apparaît ni dans $\forall x \ A$ ni dans $\forall y \ B$ nous avons $\langle z/x \rangle A \sim \langle z/y \rangle B$

Exemple : $\forall w \ P(w + x)$ et $\forall v \ P(v + x)$ sont équivalentes

Désormais nous ne raisonnons plus que sur des classes d'expressions modulo équivalence alphabétique

La substitution (enfin ...)

- $(t/x)(\forall y\ A) = \forall w\ (t/x)\langle w/y\rangle A$
  où w est une variable quelconque différente de x et y et qui n'apparaît ni dans t ni dans A

Un empilement de notions : substitution avec captures $\to$ équivalence alphabétique $\to$ classes d'expressions $\to$ substitution

De nombreuses erreurs dans les livres

De nombreuses erreurs dans les logiciels de calcul symbolique (systèmes de vérification de démonstrations, systèmes de recherche de démonstrations, systèmes de calcul formel, compilateurs...)

IV. La notion de démonstration

Une démonstration : un arbre de dérivation avec les règles de la déduction naturelle

Un exemple

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{P \land Q \vdash P \land Q}\ \text{axiom}
  }{P \land Q \vdash Q}\ \land\text{-élim2}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{}{P \land Q \vdash P \land Q}\ \text{axiom}
  }{P \land Q \vdash P}\ \land\text{-élim1}
}{
  \dfrac{P \land Q \vdash Q \land P}{\vdash (P \land Q) \Rightarrow (Q \land P)}\ \Rightarrow\text{-intro}
}\ \land\text{-intro}
$$

La prochaine fois

La notion de théorie