La réduction en appel par nom nous permet de revenir dans le cadre que nous avons défini dans l'introduction de ce chapitre. Un programme est simplement un couple formé d'un ensemble orthogonal de règles de réécriture et d'un symbole de fonction, le terme formé du programme $(\mathcal{R}, F)$ et des entiers p_1, $\ldots$, p_n est le couple formé de l'ensemble de règles $\mathcal{R}$ et du terme $F(\underline{p_1}, \ldots, \underline{p_n})$ et le pas élémentaire de calcul est la réduction en appel par nom par les règles de $\mathcal{R}$.

Nous voulons maintenant associer, à chaque fonction calculable f, un ensemble de règles de réécriture qui représente cette fonction, à la fois en général et en appel par nom.

La principale difficulté est illustrée par cet exemple. Si g est une fonction qui n'est pas définie en 4 et h est la fonction identiquement nulle, la fonction $f = h \circ g$ n'est pas définie en 4. Pourtant, si on pose naïvement les règles $H(x) \longrightarrow 0$ et $F(x) \longrightarrow H(G(x))$, alors le terme $F(\underline{4})$ se réduit en $H(G(\underline{4}))$ puis en 0, alors qu'il ne devrait pas terminer. On modifie donc les règles $H(x) \longrightarrow 0$ et $F(x) \longrightarrow H(G(x))$ en $H(x) \longrightarrow 0 \& x$ et $F(x) \longrightarrow H(G(x)) \& x$ en introduisant un symbole binaire & tel que $t \& u$ se réduise en t si u se réduit en un entier, mais $t \& u$ ne termine pas si u ne termine pas. Cette propriété s'obtient en posant les règles $x \& 0 \longrightarrow x$ et $x \& S(y) \longrightarrow x \& y$, qui effacent le terme u progressivement, à condition que ce soit la représentation d'un entier.

Définition 4.15 (La représentation des fonctions calculables)

Soit f une fonction calculable à n arguments, on associe à f un ensemble de règles de réécriture et un symbole F. Tous les ensembles contiennent les règles suivantes

$$x \& 0 \longrightarrow x$$

$$x \& S(y) \longrightarrow x \& y$$

$$\mathit{Ifz}(0, y, z) \longrightarrow y$$

$$\mathit{Ifz}(S(x), y, z) \longrightarrow z \& x$$

Puis, on ajoute des règles spécifiques à la fonction f, par récurrence sur sa construction.

- Si la fonction f est la i-ième projection, on ajoute la règle

$$F(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow ((((x_i \& x_1) \& \ldots \& x_{i-1}) \& x_{i+1}) \& \ldots \& x_n)$$

- Si la fonction f est identiquement nulle, on ajoute la règle

$$F(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow ((0 \& x_1) \& \ldots \& x_n)$$