

programme est définie en  $p_1, \dots, p_n$ . On dit qu'il *prend la valeur*  $q$  en  $p_1, \dots, p_n$  si, en outre,  $f(p_1, \dots, p_n) = q$ .

### Exercice 3.3

Quelle est la fonction calculée par le programme  $\circ_1^1(\text{Succ}, \text{Succ})$  ?

### Exercice 3.4

Quelle est la fonction calculée par le programme  $\mu^1(\pi_1^2)$  ?

## 3.4.1 L'indécidabilité du problème de l'arrêt

### Théorème 3.1 (L'indécidabilité du problème de l'arrêt)

L'ensemble des couples d'entiers  $(p, q)$  tels que  $p$  est le numéro d'un programme qui termine en  $q$  est indécidable.

*Démonstration.* Par l'absurde. Supposons l'existence d'un programme  $t$  tel que  $t$  appliqué à deux entiers  $p$  et  $q$  termine toujours, donne le résultat 1 si  $p$  est le numéro d'un programme qui termine quand on l'applique à l'entier  $q$  et le résultat 0 sinon. Rappelons que le programme  $b = \mu^1(\pi_1^2)$  termine quand on l'applique à l'entier 0 et ne termine pas quand on l'applique à un entier non nul et considérons le programme  $u = \circ_1^1(b, \circ_2^1(t, \pi_1^1, \pi_1^1))$ . Quand on applique le programme  $u$  à un entier  $p$ , on applique d'abord le programme  $\circ_2^1(t, \pi_1^1, \pi_1^1)$  à cet entier. On obtient le résultat 1 si  $p$  est le numéro d'un programme qui termine quand on l'applique à l'entier  $p$  et le résultat 0 sinon. Donc le programme  $u$  appliqué à l'entier  $p$  ne termine pas si  $p$  est le numéro d'un programme qui termine quand on l'applique à l'entier  $p$  et il termine sinon.

Soit  $m$  l'entier  $\ulcorner u \urcorner$ . Le programme  $u$  appliqué à l'entier  $m$  ne termine pas si  $m$  est le numéro d'un programme qui termine quand on l'applique à l'entier  $m$  et il termine sinon. Autrement dit, le programme  $u$  appliqué à  $m$  ne termine pas si le programme  $u$  termine quand on l'applique à  $m$  et il termine sinon. Le programme  $u$  appliqué à  $m$  ne termine pas si et seulement s'il termine, ce qui est contradictoire.