

- $|P| = \neg\neg P$
- $|\top| = \neg\neg\top$
- $|\perp| = \neg\neg\perp$
- $|A \wedge B| = \neg\neg(|A| \wedge |B|)$
- $|A \vee B| = \neg\neg(|A| \vee |B|)$
- $|A \Rightarrow B| = \neg\neg(|A| \Rightarrow |B|)$
- $|\neg A| = \neg\neg\neg|A|$
- $|\forall x A| = \neg\neg\forall x |A|$
- $|\exists x A| = \neg\neg\exists x |A|$

2. Quelle est la proposition $|\exists x (P(x) \wedge \neg P(S(x)))|$?

3. On associe à chaque proposition A de la logique des prédicats une proposition $\|A\|$ similaire à $|A|$, sauf que l'on enlève une négation à la racine

- $\|P\| = \neg P$
- $\|\top\| = \neg\top$
- $\|\perp\| = \neg\perp$
- $\|A \wedge B\| = \neg(|A| \wedge |B|)$
- $\|A \vee B\| = \neg(|A| \vee |B|)$
- $\|A \Rightarrow B\| = \neg(|A| \Rightarrow |B|)$
- $\|\neg A\| = \neg\neg|A|$
- $\|\forall x A\| = \neg\forall x |A|$
- $\|\exists x A\| = \neg\exists x |A|$

Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ a une démonstration — non nécessairement constructive —, dans le calcul des séquents sans coupures, alors le séquent $|\Gamma|\|\Delta\| \vdash$ a une démonstration sans coupures et constructive.

4. Soit A une proposition. Montrer que si A a une démonstration — non nécessairement constructive —, alors $|A|$ a une démonstration constructive.

5. Montrer que pour toute proposition B , la proposition $B \Leftrightarrow \neg\neg B$ a une démonstration — non nécessairement constructive. Montrer que la proposition $A \Leftrightarrow |A|$ a une démonstration — non nécessairement constructive. Montrer que si la proposition $|A|$ a une démonstration constructive, alors la proposition A a une démonstration — non nécessairement constructive. Montrer que la proposition $|A|$ a une démonstration constructive si et seulement si la proposition A a une démonstration — non nécessairement constructive.

6. Donner une démonstration constructive du séquent $|P(0)|, |\neg P(2)| \vdash |\exists x (P(x) \wedge \neg P(S(x)))|$.

7. Donner une démonstration constructive du séquent $P(0), \neg P(2) \vdash \neg\neg\exists x (P(x) \wedge \neg P(S(x)))$.