

# 6

## *La démonstration automatique*

Nous avons vu, au chapitre 5, que la démontrabilité en logique des prédicats est indécidable, mais semi-décidable, c'est-à-dire qu'il existe une fonction calculable  $f$  telle que  $f(\ulcorner \Gamma \vdash \Delta \urcorner) = 1$  si le séquent  $\Gamma \vdash \Delta$  est démontrable et  $f$  n'est pas définie en  $\ulcorner \Gamma \vdash \Delta \urcorner$  sinon. Cette fonction énumère les entiers et teste si l'un d'eux est le numéro d'une démonstration de  $\Gamma \vdash \Delta$ . Si une telle démonstration existe, son numéro apparaîtra au cours de l'énumération. Sinon, celle-ci se poursuivra à l'infini.

Cette méthode permet de montrer que la démontrabilité en logique des prédicats est semi-décidable, mais elle est sans intérêt pratique. Toutefois, l'idée d'énumération et de test sur laquelle elle repose peut aussi mener à des méthodes moins inefficaces.

### 6.1 Le calcul des séquents

#### 6.1.1 La recherche de démonstrations en déduction naturelle

Une méthode de recherche de démonstrations consiste à énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud d'une démonstration, en procédant du bas vers le haut. Si on cherche, par exemple, une démonstration du séquent  $P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)$ , on commence par énumérer les différentes règles qui peuvent