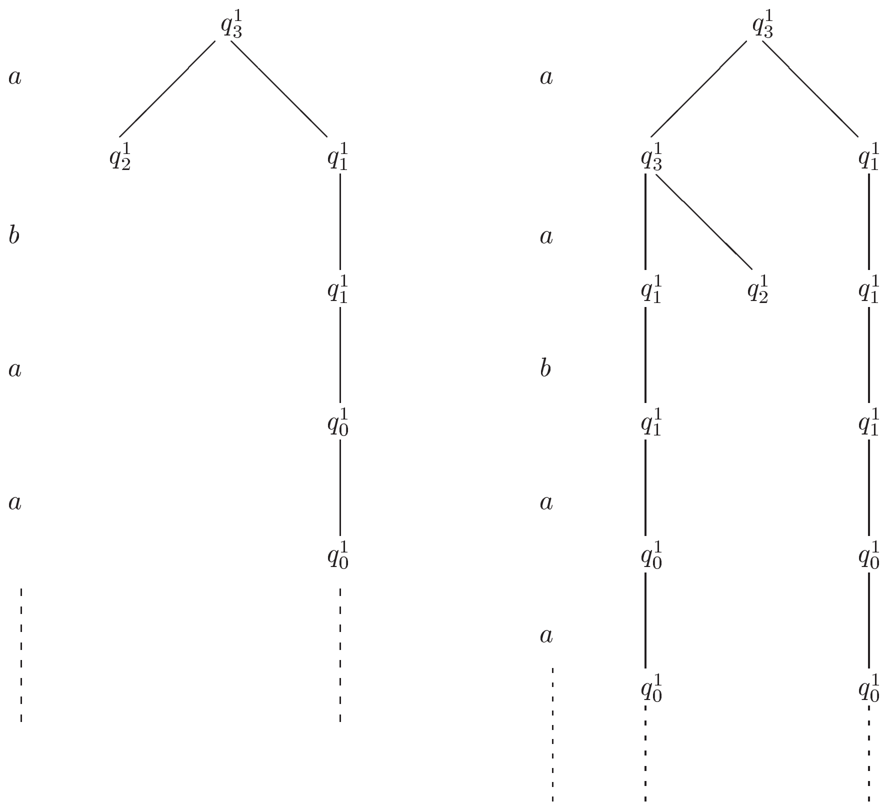

FIG. 16 – Calculs sur aba^ω et sur $aaba^\omega$

Solutions des exercices

Exercice 13:

Soit $w \in A^\omega$. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^c$ ont un seul et même calcul ρ sur w. ρ contient une infinité d'états finaux de $\mathcal{A}$ ssi ρ se termine par q_f^ω pour un certain $q_f \in Q_f$ (car l'automate est faible) ssi ρ ne contient qu'un nombre fini d'états de $Q \setminus Q_f$ ssi w n'est pas accepté par $\mathcal{A}^c$

Exercice 14:

On remarque d'abord que la construction du lemme 16 préserve la faiblesse en utilisant l'ordre sur les paires d'ensembles :

$$(S_1, S_2) > (S_1', S_2') \qquad \text{ssi} \qquad S_1 \uplus S_2 \gg S_1' \uplus S_2'$$

où $\gg$ est l'extension (multi)-ensembliste de l'ordre sur les états, $\uplus$ étant l'union multi-ensembliste.

Il suffit donc d'exhiber un langage Büchi-reconnaissable qui n'est pas reconnu par un automate de Büchi non-déterministe faible. Soit $L = (ab)^\omega$. S'il était reconnu par un automate faible, il existerait un calcul réussi de la forme wq^ω. q doit alors être un état final, et l'automate doit comporter une boucle de q sur lui-même, en lisant a ou b. Mais alors il existerait un mot w_0 tel que w_0a^ω serait dans le langage, ce qui est absurde.

Exercice 15:

L'automate est faible. Les calculs sur aba^ω et sur $aaba^\omega$ sont donnés dans la figure 16.

Mots acceptés depuis les états :

$$\begin{array}{lcl} q_2^1 & : & b(a+b)^\omega \\ q_2^2 & : & a(a+b)^\omega \\ q_0^1 & : & a^\omega \\ q_1^1 & : & (a+b)^* a^\omega \\ q_3^1 & : & aa^* b(a+b)^* a^\omega \end{array}$$

Exercice 16:

$$\begin{array}{lcl} q_0 & \xrightarrow{a} & q_1 \\ q_1 & \xrightarrow{b} & q_0 \end{array}$$

avec $r(q_0) = r(q_1) = 0$.
Exercice 17:

On utilise la construction du théorème 17, avec

$r(\mathbf{X}\phi) = r(\phi)$

$r(P) = r(\neg P) = 0$

$r(\phi \wedge \psi) = r(\phi \vee \psi) = \max(r(\phi), r(\psi))$

$r(\phi\, \mathcal{U} \psi)$ est le plus petit entier impair supérieur ou égal à $r(\phi)$ et à $r(\psi)$

$r(\neg(\phi\, \mathcal{U} \psi))$ est le plus petit entier pair supérieur ou égal à $r(\phi)$ et à $r(\psi)$

Exercice 19:

$$\begin{array}{lcl} q_1^1 & \xrightarrow{a} & q_3^0 \vee q_2^1 \\ q_2^1 & \xrightarrow{b} & q_1^1 \\ q_3^0 & \xrightarrow{a} & q_3^0 \end{array}$$

Le rang est en exposant de l'état et l'état initial est q_1^1
Exercice 20:

Si $q \xrightarrow{a} q'$ on a les transitions $q^2 \xrightarrow{a} q'^2 \wedge q'^1$, $q^1 \xrightarrow{a} q'^1$ si $q^1 \notin Q_f$, $q^1 \xrightarrow{a}$ **true** si $q^1 \in Q_f$.
Exercice 22:

On considère l'automate $\mathcal{A}_k$ à $2k+1$ états tel que les états pairs sont les états finaux, les états impairs ne sont pas finaux et $q_{2i+1} \xrightarrow{a} q_{2i+1}$, $q_{2i+1} \xrightarrow{a} q_{2i+2}$, $q_{2i+2} \xrightarrow{a} q_{2i+3}$, pour les indices pour lesquels ces transitions sont définies. On montre alors que $\mathcal{A}_k$ n'accepte aucun mot, alors que l'automate alternant à parité construit accepte a^ω.

Par exemple, pour $k = 2$, on obtient le calcul acceptant de la figure 17.
Exercice 23:

$3 \to 6$, $9 \to 6$ est gagnante pour $\circ$ qui ne laisse à l'adversaire que deux choix possibles : la boucle 6,9 (gagnante pour $\circ$ puisque le minimum des rangs ... est 2) et la boucle 3,6,7,8 qui est elle aussi gagnante (min 0).

Si on remplace $r(7)$ par 2, $\Box$ a une stratégie gagnante : $6 \to 7$, $4 \to 5$, qui force l'une des boucles 3,4,5,8 ou 3,6,7,8 à se répéter.
Exercice 24:

On considère un automate sur un alphabet à une lettre, défini comme suit, avec la stratégie s du joueur 1 :

	δ	s
q_2	$(q_1 \wedge q_2) \vee (q_0 \wedge q_1')$	q_1, q_2
q_1	$q_0 \vee (q_1 \wedge q_1')$	q_0
q_1'	q_1'	q_1'
q_0	q_0	q_0

On vérifie que s est gagnante pour 1, le rang étant donné par les indices et l'état initial étant q_2.

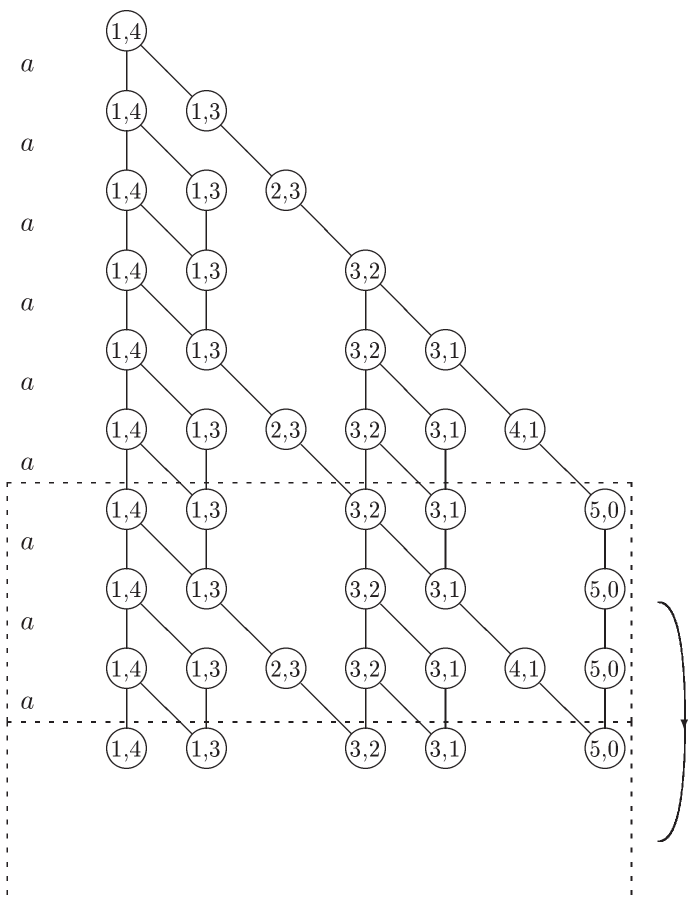

FIG. 17 – Un calcul acceptant sur a^ω

$R = \{q_0, q_1\} \models \widetilde{\delta}(q_2)$ et $R \models \widetilde{\delta}(q_1)$. $\widetilde{s}$ est alors définie (entre autres) par $\widetilde{s}(\{q_0, q_1\}) \in s(q_2) \cap R$ et donc $\widetilde{s}(\{q_0, q_1\}) = q_1$. Cette stratégie n'est pas gagnante puique, si le joueur 1 choisit toujours $\{q_0, q_1\}$ on obtient une partie $q_2 \cdot R \cdot (q_1 \cdot R)^\omega$ qui est perdante pour 2 sur le jeu dual.

Exercice 25:

Soit $\mathcal{A}$ l'automate à deux états $q_1 \xrightarrow{b} q_1$, $q_1 \xrightarrow{a} q_0$, $q_0 \xrightarrow{a} q_0$, $q_0 \xrightarrow{b} q_1$, le rang étant l'indice de l'état. L'état initial est q_1.

L'automate de Büchi calculé suivant le lemme 30 est donné par :

	a	b
$\{q_1\}, \emptyset$	$(\emptyset, \{q_0\}) \vee (\{q_1\}, \{q_0\})$	$(\{q_1\}, \emptyset) \vee (\{q_1\}, \{q_0\})$
$\emptyset, \{q_0\}$	$(\{q_0\}, \emptyset) \vee (\{q_0, q_1\}, \emptyset)$	$(\{q_1\}, \emptyset) \vee (\{q_0, q_1\}, \emptyset)$
$\{q_1\}, \{q_0\}$	$\emptyset, \{q_0, q_1\}$	$(\{q_1\}, \{q_1\}) \vee \cdots$
$\{q_0\}, \emptyset$	$(\emptyset, \{q_0\}) \vee \cdots$	$(\{q_1\}, \emptyset) \vee \cdots$
$\{q_0, q_1\}, \emptyset$	$\cdots$	$\cdots$
$\emptyset, \{q_0, q_1\}$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$		

Cet automate accepte $(aab)^\omega$, grâce au calcul acceptant $((\{q_1\}, \emptyset)(\emptyset, q_0)(0, \emptyset))^\omega$.

Exercice 26:

On note

$$\begin{cases} \mathsf{Attr}_0^a(S) = S \\ \mathsf{Attr}_{k+1}^a = \{q \in Q_a \mid \delta(q) \cap \mathsf{Attr}_k^a(S) \neq \emptyset\} \\ \qquad \cup \{q \in Q_b \mid \delta(q) \subseteq \mathsf{Attr}_k^a(S)\} \\ \mathsf{Attr}_a(S) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathsf{Attr}_i^a(S) \end{cases}$$

Remarquons que, si $S \subseteq G$, $G \setminus \mathsf{Attr}_a(S)$ est un sous-jeu (i.e. si on restreint les positions de G à celles qui ne sont pas dans $\mathsf{Attr}_a(S)$ et les transitions à celles qui ne vont pas dans $\mathsf{Attr}_a(S)$, on obtient encore un jeu). En effet :

- Si $q \in (G \setminus \mathsf{Attr}_a(S)) \cap Q_a$, alors $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_a(S) = \emptyset$
- Si $q \in (G \setminus \mathsf{Attr}_a(S)) \cap Q_b$, alors $\delta(q) \not\subseteq \mathsf{Attr}_a(S)$ et donc b a au moins un coup possible qui reste dans $G \setminus \mathsf{Attr}_a(S)$.

On montre le résultat par récurrence sur le nombre d'éléments de G. Si G est vide, le résultat est montré. Soit maintenant q_0 un état de rang minimal de G. Soit a le joueur gagnant quand le minimum des rangs des états visités infiniment souvent est de même parité que q_0. Soit $G_1 = G \setminus \mathsf{Attr}_a(q_0)$. q_0 n'est pas une position de G_1, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : $G_1 = W_a \uplus W_b$ où W_a (resp. W_b) est un ensemble de positions desquelles a (resp. b) a une stratégie gagnante sans mémoire dans le jeu G_1. On notera s_a (resp. s_b) les stratégies correspondantes.

Remarquons que, si $q \in W_b \cap Q_a$, $\delta(q) \subseteq W_b$. En effet, par définition de W_a, W_b, $\delta(q) \cap W_a = \emptyset$ et, comme $q \notin \mathsf{Attr}_a^G(q_0)$, $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_a^G(q_0) = \emptyset$. De même, si $q \in Q_a \cap \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$, alors $\delta(q) \subseteq \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$. ($\mathsf{Attr}_b^G(W_b)$ est un piège pour a).

1er cas : $q_0 \notin \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$

Dans ce cas, on montre que $\mathsf{Attr}_b^G(W_b) = W_b$, que W_b est un ensemble de positions gagnantes pour b et son complémentaire est un ensemble de positions gagnantes pour a.

Pour le premier point ($W_b = \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$), il suffit de montrer que $W_b = \mathsf{Attr}_1^b(W_b)$.

- Tout d'abord, si $q \in W_a \cap Q_a$, $\delta_{G_1}(q) \cap W_a \neq \emptyset$ et donc $\delta(q) \cap W_a \neq \emptyset$, donc $\delta(q) \not\subseteq W_b$ et $q \notin \mathsf{Attr}_1^b(W_b)$.
- Si $q \in W_a \cap Q_b$, $\delta_{G_1}(q) \not\subseteq W_b$ et donc $q \notin \mathsf{Attr}_1^b(W_b)$
- Si $q \in \mathsf{Attr}_{n+1}^a(q_0) \cap Q_a$, alors, par définition, $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_n^a(q_0) \neq \emptyset$ et donc $\delta(q)$ contient au moins une position qui n'est pas une position de G_1
- Si $q \in \mathsf{Attr}_{n+1}^a(q_0) \cap Q_b$, alors $\delta(q) \subseteq \mathsf{Attr}_n^a(q_0)$ qui est d'intersection vide avec W_b
- Si $q = q_0$, par hypothèse, $q \notin W_b$

Maintenant, si $q \in W_b$, la stratégie gagnante pour b consiste à utiliser s_b : W_b est un piège pour a car il n'existe pas de mouvement de a vers $\mathsf{Attr}_a^G(q_0)$ par définition de $\mathsf{Attr}_a^G(q_0)$ et il n'existe pas de mouvement de a vers W_a sinon la position serait gagnante pour a dans G_1

Si $q \notin W_b$, et $q \in Q_b$, $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_b^G(W_b) = \emptyset$ (en fait, $G \setminus \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$ est un piège pour b). Si $q \in Q_a$, on définit s par :

- Si $q \in \mathsf{Attr}_{n+1}^a(q_0)$, $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_n^a(q_0) \neq \emptyset$ et on choisit $s(q)$ dans cet ensemble
- Si $q = q_0$ on choisit $s(q)$ hors de $\mathsf{Attr}_b^G(W_b)$
- Si $q \in W_a$, $q \notin \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$, $q \notin \mathsf{Attr}_a^G(q_0)$, alors on choisit $s(q) = s_a(q)$.

La stratégie est gagnante pour a car :

- $G \setminus W_b$ est un piège pour b et a force à rester dans cet ensemble de positions.
- Suivant sa stratégie, toute partie ou bien reste ultimement dans W_a et est donc gagnante pour a, ou bien passe infiniment souvent par $\mathsf{Attr}_a^G(q_0)$ et donc infiniment souvent par q_0. Dans ce cas, la partie est à nouveau gagnante pour a puisque q_0 est de rang minimal.

2ème cas : $q_0 \in \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$

Dans ce cas, $G_2 = G \setminus \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$ est un sous-jeu de cardinal strictement plus petit que celui de G ; on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G_2. Soit W'_a et W'_b une partition des positions de G_2 telle que a a une stratégie gagnante s_2^a sur G_2 depuis une position de W'_a et b a une stratégie gagnante s_2^b depuis une position de W'_b. Remarquons que :

$$\begin{cases} q \in W'_a \cap Q_b & \Rightarrow \quad \delta(q) \subseteq W'_a \\ q \in W'_b \cap Q_a & \Rightarrow \quad \delta(q) \subseteq W'_b \\ q \in W'_a \cap Q_a & \Rightarrow \quad \delta(q) \cap W'_a \neq \emptyset \end{cases}$$

On montre alors que $W'_b \cup \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$ est un ensemble de positions gagnantes pour b, alors que son complémentaire, W'_a, est un ensemble de positions gagnantes pour a. En effet :

- Si $q \in W'_b \cup \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$, alors
  - a est piégé dans cet ensemble
  - Si $q \in W_b$, b joue suivant s_b et reste dans W_b (donc gagne)
  - Si $q \in \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$, b joue de manière à se rapprocher de W_b (et y parvient en un nombre fini de coups)
- Si $q \in W'_a$, la stratégie de a consiste à appliquer s'_a, qui force à rester dans cet ensemble.