7 Jeux à parité et le théorème de complémentation

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la clôture par complémentaire de la classe des langages reconnus par un automate de Büchi. Nous avons choisi la preuve donnée dans [Tho99] parce qu'elle utilise les automates alternants et permet d'introduire des notions utiles pour la suite, typiquement la vérification en μ-calcul. Il s'agit des conditions d'acceptance à parité, des automates faibles, des jeux à deux joueurs et du théorème de détermination des jeux.

7.1 Jeux à parité

Pour démontrer le résultat de dualité des automates alternants faibles à condition de parité, il est commode de voir le problème en termes de jeux, ce qui d'ailleurs permettra plus loin de classifier certains problèmes de vérification en termes de stratégies gagnantes, puis de se ramener à des problèmes algorithmiques sur des graphes finis.

Un *jeu à parité* est un tuple $G = (Q_1, Q_2, \delta_1, \delta_2, r, q_0)$ où Q_1, Q_2 sont des ensembles d'états finis disjoints, δ_1 est une application de $Q_1 \times \mathbb{N}$ dans 2^{Q_2} et δ_2 est une application de $Q_2 \times \mathbb{N}$ dans 2^{Q_1} telles que $\delta_k(q, i)$ n'est jamais vide. r est une fonction de *rang* de $Q_1 \cup Q_2$ dans $\mathbb{N}$. Enfin, $q_0 \in Q_1$ est l'*état initial*.

Une *configuration* du jeu G est un élément de $Q_1 \times \mathbb{N} \cup Q_2 \times \mathbb{N}$. Une *partie* est un mot infini P sur $Q_1 \cup Q_2$ tel que $w(0) = q_0$ et, si $w(i) = q \in Q_j$, alors $w(i+1) \in \delta_j(q, i)$. Le joueur 1 *gagne la partie* P si le minimum des rangs des états apparaissant infiniment souvent dans P est pair. Sinon, c'est le joueur 2 qui gagne.

Une *stratégie* (sans mémoire) s pour le joueur 1 (resp. le joueur 2) est une application de $Q_1 \times \mathbb{N}$ (resp. $Q_2 \times \mathbb{N}$) dans Q_2 (resp. Q_1) telle que $s(q, i) \in \delta_1(q, i)$ (resp. $\in \delta_2(q, i)$) pour tous q, i.

Un joueur B a une *stratégie gagnante* s'il gagne la partie en appliquant sa stratégie, quels que soient les coups de son adversaire.

Exercice 23
Considérer le jeu G décrit dans la figure 15. Les deux tours de jeu sont figurés respectivement par un carré et un rond dans lesquels sont indiqués les noms des configurations (pour faciliter l'expression des stratégies). Le rang de chaque configuration est figuré à l'extérieur de chaque configuration et les déplacements autorisés sont les arêtes du graphe.

Montrer que le joueur rond a une stratégie gagnante (sans mémoire). Que se passe-t-il si l'on remplace $r(7)$ par 2 ?

Un jeu à parité est *faible* si $r(q') \leq r(q)$ dès que $q' \in \delta_i(q, j)$ pour un certain j. Pour ces jeux particuliers on a alors :

Lemme 24 (déterminisme des jeux à parité faibles) *Pour tout jeu à parité faible, l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante sans mémoire.*

Preuve: Soit A_i^j et B_i^j les ensembles définis par récurrence comme suit (l'intention est de définir ainsi les configurations gagnantes pour A et B respectivement en jouant au plus j coups à un rang supérieur à i) :

- $A_0^0 = \{(q, k) \in Q_1 \times \mathbb{N} \mid r(q) = 0\}$
- $B_0^0 = \emptyset$
- $$\begin{array}{rcl} A_i^{j+1} & = & A_i^j \\ & & \cup \{(q, k) \in Q_1 \times \mathbb{N} \mid A_i^j \cap \delta_1(q, k) \neq \emptyset\} \\ & & \cup \{(q, k) \in Q_2 \times \mathbb{N} \mid \delta_2(q, k) \subseteq A_i^j\} \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} B_i^{j+1} & = & B_i^j \\ & & \cup \{(q, k) \in Q_1 \times \mathbb{N} \mid \delta_1(q, k) \subseteq B_i^j\} \\ & & \cup \{(q, k) \in Q_2 \times \mathbb{N} \mid \delta_2(q, k) \cap B_i^j \neq \emptyset\} \end{array}$$

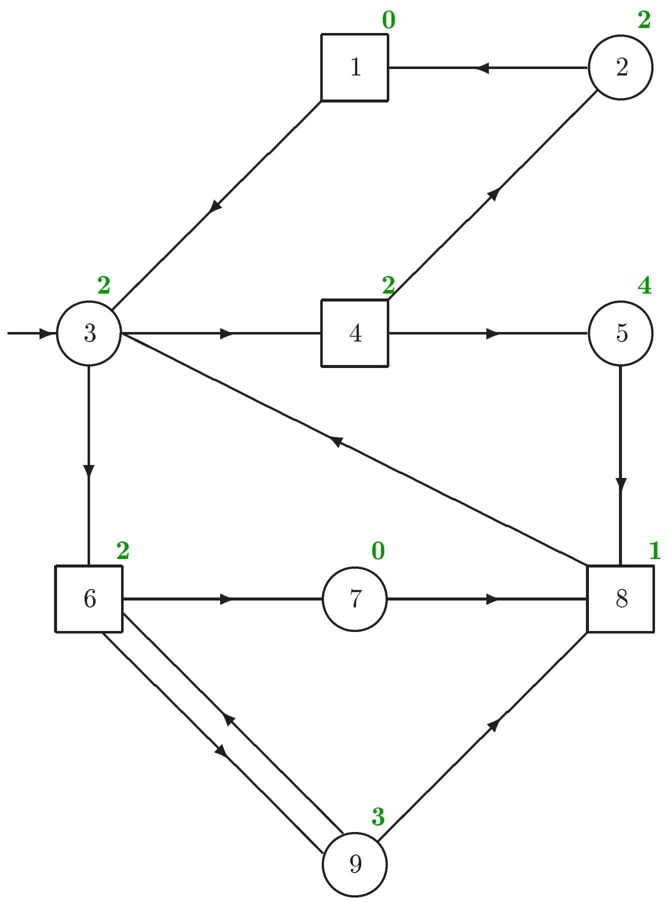

Fig. 15 – Un jeu à parité

– Si i est pair, alors $B^0_{i+1} = \{(q,k) \notin \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{m=0}^{+\infty} A^m_j \mid r(q) = i+1\}$. Si i est impair, $B^0_{i+1} = \emptyset$

– Si i is est pair, alors $A^0_{i+1} = \{(q,k) \notin \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{m=0}^{+\infty} B^m_j \mid r(q) = i+1\}$. Si i est pair, alors $A^0_{i+1} = \emptyset$.

Remarquons que A^j_i, B^j_i ne contiennent que des configurations de rang supérieur ou égal à i, par récurrence sur j et par faiblesse du jeu.

Soit B_i (resp. A_i) l'ensemble $\bigcup_{k\leq i} \bigcup_{j=0}^{+\infty} B^j_k$ (resp. $\bigcup_{k\leq i} \bigcup_{j=0}^{+\infty} A^j_k$).

On montre par récurrence sur i que

– $A_i \cap B_i = \emptyset$,
– $A_i \cup B_i$ contient toutes les configurations de rang inférieur ou égal à i,
– si $(q,k) \in A_i$ (resp. $(q,k) \in B_i$), il existe une stratégie gagnante sans mémoire pour le joueur 1 (resp. pour le joueur 2) pour les parties commençant dans la configuration (q,k).

Pour cela, remarquons d'abord que, pour i pair, B^j_i est vide et que, pour i impair, A^j_i est vide (par récurrence sur j). Si $i = 0$, $B_0 = \emptyset$ et le résultat est prouvé : la stratégie du joueur 1 sur $(q,0)$ est arbitraire. Soit maintenant $i > 0$. Supposons que i est pair (si i est impair, il suffit d'échanger les A et les B). s est la stratégie gagnante pour le joueur A à partir d'une configuration de A_{i-1}. On étend s à A^j_i par récurrence sur j :

– Si $j = 0$, $q \in Q_1$, il exite un successeur de (q,k) qui n'est pas dans B_{i-1}, par définition de A^0_i. On choisit $s(q,k) \notin B_{i-1}$ (si $s(q,k)$ n'est pas déjà défini).
– Si $j > 0$, $q \in Q_1$ et $(q,k) \in A^j_i \setminus A^{j-1}_i$, alors, par définition, $\delta_1(q,k) \cap A^{j-1}_i$ est non vide. On choisit $s(q,k)$ dans cet ensemble (s'il n'est pas déjà défini).

Montrons par récurrence sur j que toute partie commençant dans une configuration de l'un des ensembles A^j_i, et suivant la stratégie s, est gagnante pour le joueur 1. Seul le cas de base $j = 0$ est non trivial. Si une partie commence en $(q,k) \in A^0_i$, avec $q \in Q_1$ alors, par définition de s, la configuration suivante $s(q,k)$ n'est pas dans B_{i-1}. Par faiblesse du jeu, $r(s(q,k)) \leq i$. Donc, ou bien $r(s(q,k)) = i$ et $s(q,k) \in A^0_i$, ou bien $r(s(q,k)) < i$ et, par hypothèse de récurrence, $s(q,k) \in A_{i-1}$ Si maintenant $q \in Q_2$, montrons qu'aucun successeur de (q,k) n'est dans B_{i-1}. On concluera alors comme ci-dessus que la configuration suivante d'une partie commençant par (q,k) est dans $A^0_i \cup A_{i-1}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde : si $(q', k+1) \in B_{i-1}$, alors, il existe $l < i, m$ tels que $(q', k+1) \in B^m_l$. Mais, par définition de B^{m+1}_l, cela implique que $(q,k) \in B^{m+1}_l$, donc $(q,k) \in B_{i-1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous avons donc montré que, dans tous les cas, dans une partie commençant par $(q,k) \in A^0_i$ et suivant la stratégie s, la configuration suivante est dans $A^0_i \cup A_{i-1}$. Alors, ou bien toutes les configurations de la partie sont dans A^0_i et, le rang de toutes les configurations de A^0_i étant le nombre pair i, la partie est gagnée pour le joueur 1. Ou bien, il existe une configuration de la partie qui est dans A_{i-1}. Dans ce cas, par hypothèse de récurrence, la partie est aussi gagnée pour le joueur 1.

$A_i \cap B_i = \emptyset$ car il ne peut exister de stratégie gagnante pour les deux joueurs. Par ailleurs, $A_i \cup B_{i-1}$ contient, par définition de A^0_i et par hypothèse de récurrence, toutes les configurations de rang inférieur ou égal à i.

Maintenant, $W_A = \bigcup_i A_i$ et $W_B = \bigcup_i B_i$ forment une partition de l'ensemble des configurations du jeu et, comme nous l'avons vu, si la configuration initiale est dans W_A (resp. dans W_B), c'est à dire dans l'un des A_i (resp. B_i), alors il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1 (resp. le joueur 2). □

Ce résultat se généralise aux jeux à parité, pas nécessairement faibles. Mais la preuve est beaucoup plus difficile (voir par exemple [Tho97] où en fait est montré un résultat plus général : au lieu de damiers "linéaires", les damiers sont arborescents),