On considère dans ce paragraphe des jeux finis et on s'intéresse à la complexité de la recherche de stratégies gagnantes. Ce problème est lié à la vérification de modèles (finis) et au problème d'accessibilité dans les graphes ET/OU.

Un graphe (dirigé) ET/OU est un ensemble de sommets S, un ensemble d'arêtes $R \subseteq S \times S$, ainsi qu'une application e de S dans $\{\wedge, \vee\}$. Etant donné un graphe ET/OU G, on note $\xrightarrow[G]{*}$ la relation *d'accessibilité* définie par : $\xrightarrow[G]{*}$ est le plus petit sous-ensemble de $S \times 2^S$ tel que :

- si $s^0 \in S_1$, alors $s^0 \xrightarrow[G]{*} S_1$
- si $e(s^0) = \vee$ et il existe un sommet s^1 tel que $(s^0, s^1) \in R$ et $s^1 \xrightarrow[G]{*} S_1$, alors $s^0 \xrightarrow[G]{*} S_1$
- si $e(s^0) = \wedge$ et pour tout sommet s^1 tel que $(s^0, s^1) \in R$, $s^1 \xrightarrow[G]{*} S_1$, alors $s^0 \xrightarrow[G]{*} S_1$.

Theorème 32 *L'accessibilité dans un graphe ET/OU est décidable en temps linéaire.*

Preuve: Etant donné un ensemble de sommets S_1, on calcule le plus petit point fixe de l'application qui à S associe l'ensemble des sommets desquels on peut accéder à S en au plus une étape. Plus précisément :

1. Initialement, $S = S_1$, $T = S_1$
2. Tant que $T \neq \emptyset$:
   - On calcule l'ensemble T des sommets s qui ne sont pas dans S et tels que
     - Ou bien $e(s) = \vee$ et l'un des successeurs de s est dans S.
     - Ou bien $e(s) = \wedge$ et tous les successeurs de s sont dans S
   - On remplace S par $T \cup S$
3. $s^0 \xrightarrow[G]{*} S_1$ si et seulement si $s^0 \in S$

Remarquons que cet algorithme naïf de calcul de point fixe est bien polynômial. Mais on peut trouver un algorithme linéaire en étant un peu plus rusé, que nous expliquons ci-dessous.

On peut tout d'abord se ramener, en temps linéaire, au cas où chaque sommet du graphe a un degré sortant au plus deux.

A chaque sommet s du graphe est attaché un quadruplet (e(s),val(s),flag(s),ancestors(s)). $e(s) \in \{\wedge, \vee\}$, $val(s), flag(s) \in \{$**true**, **false**$\}$ et ancestors(s) est la liste des sommets tels qu'il existe une arête (s', s) dans le graphe. Initialement, flag(s) =**false** pour tous les sommets ayant deux successeurs et flag(s)=**true** pour les sommets ayant 0 ou 1 successeur. val(s) =**true** si et seulement si $s \in S_1$. Cette construction peut être effectuée en temps linéaire.

On maintient ensuite une pile P. Initialement, P contient les sommets de S_1. L'algorithme procède comme suit :

Tant que la pile P est non vide :

1. retirer le sommet de pile s.
2. pour chacun des sommets t de ancestors(s) faire :
   (a) Si $val(t) =$ **true**, ne rien faire
   (b) Si $e(t) = \vee$ et $val(t) =$ **false**, alors mettre à jour $val(t)$ à **true** et empiler t sur P
   (c) Si $e(t) = \wedge$ et $flags(t) =$ **true**, alors mettre à jour $val(t)$ à **true** et empiler t sur P
   (d) Si $e(t) = \wedge$ et $flags(t) =$ **false**, alors mettre à jour $flags(t)$ à **true**.

Si la pile P est vide, les sommets s desquels on peut accéder à S_1 sont ceux tels que $val(s) =$ **true** et l'algorithme s'arrête

On vérifie que l'algorithme est linéaire : chaque sommet est empilé au plus une fois et, pour chaque sommet dépilé s, le nombre de mises à jour est proportionnel au nombre d'ancêtres de s ; au total, le nombre de mises à jour est proportionnel au nombre d'arêtes.

Remarquons que, en cas d'accessibilité, on peut effectivement calculer un "chemin" en temps linéaire. Un tel chemin c associe à chaque sommet t tel que $e(t) = \vee$ un successeur à partir duquel S_1 est accessible. Dans la présentation ci-dessus, il suffit dans le cas 2b de garder $c(t) = s$.

□

En fait, le problème est complet pour PTIME, mais ce résultat est admis ici.

Theorème 33 *Supposant l'ensemble d'états fini, on peut décider quel joueur a une stratégie gagnante dans un jeu à parité faible en temps linéaire (et calculer cette stratégie).*

Preuve: On montre par récurrence sur le rang maximal d'une configuration que l'on peut calculer en temps linéaire, pour chaque configuration q, quel est le joueur qui a une stratégie gagnante à partir de q et aussi donner effectivement cette stratégie.

Si tous les états sont de même rang, le joueur 1 a une stratégie gagnante si et seulement si ce rang est pair. Dans ce cas, la stratégie gagnante est arbitraire.

Supposons maintenant que M est le rang maximal. On décompose les positions du jeu en $Q_0 \uplus \ldots \uplus Q_R$, Q_i étant l'ensemble des configurations de rang i. Le jeu étant faible la restriction des transitions aux configurations de $Q_0 \uplus \ldots \uplus Q_{M-1}$ est encore un jeu à parité faible lorsque la configuration initiale est choisie parmi ces états. Par hypothèse de récurrence, on peut supposer associé à chacun des états $q \in Q_0 \uplus \ldots \uplus Q_{M-1}$ le joueur gagnant $J(q)$ à partir de cet état et sa stratégie $S(q)$.

Considérons alors le graphe ET/OU dont les sommets sont les configurations Q_M plus deux sommets particuliers 1 et 2. Les arêtes sont données par les relations de transition : pour $s, s' \in Q_M$, $(s, s') \in R$ si et seulement si $s' \in \delta_i(s)$. De plus, si $s' \in \delta_i(s)$ et $r(s') < M$, alors on ajoute l'arête $(s, J(s'))$. $e(s)$ est $\vee$ si s est une configuration dans laquelle c'est au joueur 1 de jouer. $e(s)$ est $\wedge$ sinon. Si 1 est accessible à partir de q, alors le joueur 1 a une stratégie gagnante à partir de q. Si 2 est accessible à partir de q, dans le graphe dual (où les $\wedge$ et les $\vee$ sont échangés) alors le joueur 2 a une stratégie gagnante à partir de q. Si ni 1 ni 2 ne sont accessibles à partir de q dans G et le graphe dual respectivement, alors, ou bien M est pair et le joueur 1 a une stratégie gagnante, ou bien M est impair et le joueur 2 a une stratégie gagnante.

Comme, d'après le théorème 32, l'ensemble des sommets desquels 1 est accessible (resp. 2) peut être calculé en temps linéaire, on peut calculer $J(q)$ pour $q \in Q_M$ en temps linéaire.

De plus, la stratégie du joueur 1 (par exemple) est fournie par le chemin qui permet d'accéder à 1, dans le cas où 1 est accessible. Dans l'autre cas (1 n'est pas accessible dans le graphe, 2 n'est pas accessible dans le graphe dual et M est pair), il suffit d'associer à chaque sommet $\wedge$ du graphe dual un des sommets successeurs qui n'est pas étiqueté par **true**. □

Comme conséquence du théorème 33 et du lemme 26 :

Corollaire 34 *Le problème du vide pour les automates alternants à parité faibles sur un alphabet à une lettre peut être résolu en temps linéaire.*

Theorème 35 *Supposant l'ensemble d'états fini, déterminer si le joueur 1 a une stratégie gagnante dans un jeu à parité est dans NP $\cap$ co-NP.*

Preuve: On devine la stratégie ainsi que l'ensemble S des états de rang pair minimal rencontrés infiniment souvent. Vérifier que la stratégie est gagnante revient à décider que l'on peut atteindre S dans un graphe ET/OU, puis que l'on peut atteindre S à partir d'un état de S, dans le même graphe. Comme l'accessibilité dans un graphe ET/OU est polynômial (théorème 32), cette vérification se fait en temps polynômial. Il en résulte que le problème est dans NP. Par détermination des jeux à parité, le joueur 1 n'a pas de stratégie gagnante si et seulement si le joueur 2 a une stratégie gagnante, ce qui est dans NP à nouveau. Donc le problème est dans NP $\cap$ co-NP. □

Comme conséquence du théorème 33 et du lemme 26 :

Corollaire 36 *Le problème du vide pour les automates alternants avec condition de parité sur un alphabet à une lettre est dans NP $\cap$ co-NP.*