Preuve: Si $w \in L(\mathcal{A})$, d'après le lemme 26, le joueur 1 a une stratégie gagnante sans mémoire sur $G(\mathcal{A}, w)$ et, d'après le lemme 28, le joueur 2 a une stratégie locale gagnante sur $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$. Il en résulte que le joueur 1 n'a pas de stratégie gagnante sur $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$ et en particulier pas de stratégie sans mémoire. Par le lemme 26, $w \notin L(\widetilde{\mathcal{A}})$. Donc $L(\mathcal{A}) \cap L(\widetilde{\mathcal{A}}) = \emptyset$.

Si maintenant w est un mot quelconque sur l'alphabet A, par le lemme 24, l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante sans mémoire sur le jeu $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$. S'il s'agit du joueur 1, par le lemme 26, $w \in L(\widetilde{\mathcal{A}})$. S'il s'agit du joueur 2, alors le joueur 1 a une stratégie gagnante sans mémoire sur $G(\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}, w)$ d'après le lemme 28 et puisque toute stratégie sans mémoire est locale. Mais, d'après le lemme 27 et le lemme 26, $w \in L(\mathcal{A})$ dans ce cas. Ainsi, dans tous les cas, $w \in L(\mathcal{A}) \cup L(\widetilde{\mathcal{A}})$: $A^\omega = L(\mathcal{A}) \cup L(\widetilde{\mathcal{A}})$. □

Ce théorème se généralise en fait aux automates à parité quelconques, si l'on admet le résultat de déterminisme des jeux analogue au lemme 24 sans la condition de faiblesse.

7.3 Complémentation des automates de Büchi

Lemme 30 *Si $\mathcal{A}$ est un automate alternant faible avec condition de parité, on peut calculer en temps exponentiel un automate de Büchi qui accepte le même langage.*

Preuve: Elle est semblable à la preuve du lemme 16 à laquelle il faut se reporter pour plus de détails. Si $\mathcal{A} = (Q, q^0, \delta, r)$, l'automate de Büchi $\mathcal{A}'$ a pour ensemble d'états les paires (S, S') où S et S' sont des sous-ensembles de Q. La fonction de transition est définie par :

Si $S_1 \neq \emptyset$, $(S_1, S_1') \xrightarrow{a} (S_2, S_2')$ si :

Pour tout $q \in S_1 \cup S_1'$, il existe un ensemble $S_q \subseteq Q$ tel que $S_q \models \delta(q, a)$ et

– $S_2 = (\bigcup_{q \in S_1} S_q) \setminus Q_0$ où Q_0 est l'ensemble des états de rang pair.

– $S_2' = (\bigcup_{q \in S_1'} S_q) \cup ((\bigcup_{q \in S_1} S_q) \cap Q_0)$

Si $S_1 = \emptyset$, $(S_1, S_1') \xrightarrow{a} (S_2, S_2')$ si $S_2' = \emptyset$ et $S_2 = \bigcup_{q \in S_1'} S_q$ où S_q est un ensemble d'états qui satisfait $\delta(a, q)$.

Les états finaux sont ceux tels que $S = \emptyset$. L'état initial est $(\{q^0\}, \emptyset)$ □

Exercice 25
Montrer par un exemple que la construction du lemme ci-dessus n'est pas correcte dans le cas où l'automate alternant à parité n'est pas faible.

Theorème 31 *La classe des langages reconnus par un automate de Büchi est effectivement close par complémentaire.*

Preuve: C'est une conséquence des lemmes 23, 30 et du théorème 29. □

7.4 Recherche de stratégies gagnantes sur les jeux finis

Un jeu est dit *fini* si les relations de transitions des deux joueurs (δ_1 et δ_2) ne dépendent pas du second argument.

Exercice 26
Démontrer le lemme de détermination des jeux sans la condition de faiblesse, dans le cas d'un jeu fini.