7.2 Complémentation des automates alternants faibles avec condition de parité.

Soit $\mathcal{A} = (Q, q^0, \delta, r)$ un automate alternant avec condition de parité.

Lemme 25 (complète spécification) *Si $\mathcal{A}$ est un automate alternant à parité, il existe un automate $\mathcal{A}'$ acceptant le même langage et tel que, pour tout état q et toute lettre d'entrée a, $\delta'(q, a)$ est satisfaisable. $\mathcal{A}'$ se calcule en temps linéaire.*

Preuve: On peut supposer sans perdre de généralité (i.e. au prix d'une translation du rang) que le minimum des rangs est 2. $\mathcal{A}'$ est alors l'automate $\mathcal{A}$ augmenté d'un état poubelle $q_\perp$ de rang 1 et des transitions :

- $\delta'(q_\perp, a) = q_\perp$ pour toute lettre a
- $\delta'(q, a) = q_\perp$ si $\delta(q, a)$ est non spécifié ou insatisfaisable.

Comme dès l'instant qu'on atteint l'état poubelle dans un calcul, celui-ci ne peut être réussi, l'ensemble des calculs réussis de $\mathcal{A}$ est identique à l'ensemble des calculs réussis de $\mathcal{A}'$. □

On supposera donc désormais que $\delta(q, a)$ est toujours satisfaisable.

On associe à $\mathcal{A}$ et à $w \in A^\omega$ un jeu $G(\mathcal{A}, w)$ avec condition de parité comme suit : $Q_1 = Q$, $Q_2 = 2^Q$, $\delta_1(q, 2i)$ est l'ensemble des ensembles d'états S qui satisfont $\delta(q, w(i))$ et $\delta_2(S, 2i+1)$ est l'ensemble S lui-même. Enfin, le rang du jeu associe à chaque état q, $r(q)$ et aux ensembles d'états le rang maximal plus un.

Lemme 26 *Soit $\mathcal{A}$ un automate à parité quelconque. $\mathcal{A}$ accepte w si et seulement si le joueur 1 a une stratégie gagnante sans mémoire pour $G(\mathcal{A}, w)$.*

Preuve: Supposons tout d'abord que $\mathcal{A}$ accepte w : il existe un calcul réussi ρ de $\mathcal{A}$ sur w. Chaque nœud de ce calcul est caractérisé par son étiquette $q \in Q$ et sa profondeur i. La stratégie du joueur 1 consiste alors, depuis $(q, 2i)$ à choisir l'ensemble des étiquettes des fils de $(q, 2i)$ dans l'arbre ρ. La stratégie n'est pas définie pour les paires $(q, 2i)$ qui ne correspondent pas à des nœuds de ρ. En appliquant cette stratégie, le joueur 1 est assuré que la partie sera la séquence des étiquettes d'un chemin infini de ρ : le joueur 2 ne peut que choisir, à partir d'un nœud, le fils qui continuera la partie. Mais, comme pour tous les chemins infinis de ρ, le minimum des rangs des états apparaissant infiniment souvent est pair, le joueur 1 gagne nécessairement la partie.

Réciproquement, si s est une stratégie gagnante pour le joueur 1, on construit un calcul ρ à partir de s : si q étiquette le calcul à une profondeur i, on choisit $s(q, 2i)$ pour construire les successeurs de q dans ρ. □

Si $\mathcal{A}$ est un automate alternant, on note $\widetilde{\mathcal{A}}$ l'*automate dual* défini comme suit : les états de $\widetilde{\mathcal{A}}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{A}$, l'état initial est le même, les transitions de $\widetilde{\mathcal{A}}$ sont obtenues à partir de celles de $\mathcal{A}$ en remplaçant les conjonctions par des disjonctions et les disjonctions par des conjonctions. Enfin, la fonction de rang $\tilde{r}$ est définie par

$$\begin{cases} \tilde{r}(q) = r(q) + 1 & \text{Si le rang minimal est pair} \\ \tilde{r}(q) = r(q) - 1 & \text{Si le rang minimal est impair} \end{cases}$$

Lemme 27 *Pour tout automate à parité $\mathcal{A} = \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$.*

$\widetilde{\mathcal{A}}$ est un automate à parité faible dès que $\mathcal{A}$ est un automate à parité faible. Nous allons montrer qu'il accepte le complémentaire du langage accepté par $\mathcal{A}$ dans ce cas.

Nous appelerons *stratégie locale* une stratégie qui tient compte à la fois de la configuration du jeu et du dernier coup joué par l'adversaire.

Lemme 28 *Supposons que $\mathcal{A}$ est un automate alternant (quelconque) avec condition de parité. Si le joueur 1 a une stratégie gagnante sans mémoire sur $G(\mathcal{A}, w)$, si et seulement si le joueur 2 une stratégie gagnante locale sur $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$.*

Preuve: Soit s la stratégie gagnante du joueur 1. Soit $s(q, 2i) = S$ et $\tilde{\delta}(q, w(i)) = \phi$. On peut supposer sans perdre de généralité que S est minimal. Prouvons tout d'abord que, pour tout modèle R de ϕ, il existe un état $q_{i,R} \in S$ tel que $q_{i,R} \in R$. Supposons par exemple que ϕ est en forme normale conjonctive. Alors S est l'une des disjonctions d'états. Comme tout modèle de ϕ contient au moins un état par disjonction, $R \cap S \neq \emptyset$.

On définit maintenant la stratégie du joueur 2 comme suit : si $s(q, 2i) = S$ et R est un ensemble d'états tel que $R \models \widetilde{\delta}(q, w(i))$, alors $\widetilde{s}(q, R, 2i + 1)$ est un état q' tel que $q' \in R \cap S$. Un tel état existe d'après ce que nous venons de voir. La stratégie est quelconque (indéfinie) pour les autres valeurs de $q, R, 2i + 1$.

Montrons que $\widetilde{s}$ est gagnante pour le joueur 2. Plus précisément, montrons que, pour toute partie $\widetilde{P}$ jouée suivant $\widetilde{s}$ dans $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$, il existe une partie P jouée suivant s dans $G(\mathcal{A}, w)$ telle que les séquences de positions du joueur 1 dans P et dans $\widetilde{P}$ sont identiques.

On construit $P(i)$ par récurrence sur i. $P(0) = q^0 = \widetilde{P}(0)$. $P(1) = s(q^0, 0)$. Si $P(2i) = q$, $s(q, 2i) = S = P(2i + 1)$, $\widetilde{P}(2i) = q$, $\widetilde{P}(2i + 1) = R$, alors, par définition de $\widetilde{s}$, $\widetilde{P}(2i + 2) \in R \cap S$ et le joeur 2 peut choisir $P(2i + 2) = \widetilde{P}(2i + 2)$ sur le jeu $G(\mathcal{A}, w)$. On pose ensuite $P(2i + 3) = s(\widetilde{P}(2i + 2), 2i + 2)$.

P est une partie gagnante pour le joueur 1, puisqu'elle suit la stratégie s, donc le minimum des rangs des états rencontrés infiniment souvent est pair. Il en résulte que le minimum des rangs des états rencontrés infiniment souvent dans $\widetilde{P}$ est impair ($r(q)$ et $\widetilde{r}(q)$ sont de parité contraires). Donc que $\widetilde{P}$ est gagnante pour le joueur 2.

Réciproquement, supposons que le joueur 2 a une stratégie locale gagnante sur le jeu dual. On définit la stratégie s de la manière suivante :

$$s(q, 2i) = \{\widetilde{s}(q, S, 2i + 1) \mid S \models_m \widetilde{\delta}(q, w(i))\}$$

où $S \models_m \phi$ ssi $S \models \phi$ et S est minimal.

Montrons d'abord que $s(q, 2i) \models \delta(q, w(i))$ et donc est un choix possible pour le joueur 1. Si $\delta(q, w(i)) = \bigwedge_i \bigvee_j q_{i,j}$, les modèles minimaux possibles de $\widetilde{\delta}(1, w(i))$ sont les ensembles $S_i = \{q_{i,1}, \ldots, q_{i,m_i}\}$. Soit $\widetilde{s}(q, S_i, 2i + 1) = q_{i,\alpha(i)}$. L'ensemble des états $q_{i,\alpha(i)}$ est bien un modèle de $\delta(q, w(i))$.

Cette stratégie est gagnante et sans mémoire pour le joueur 1 : on construit comme ci-dessus une partie $\widetilde{P}$ suivant $\widetilde{s}$ à partir d'une partie P suivant s, dont les ensembles de positions du joueur 1 sont identiques à celles de $\widetilde{P}$. Par récurrence sur i : $P(0) = \widetilde{P}(0) = q^0$, $P(1) = s(q^0, w(0))$. Si $P(2) = q^1$, par définition, il existe un ensemble S_1 tel que $S_1 \models_m \widetilde{\delta}(q^0, w(0))$ et $q^1 = \widetilde{s}(q_0, S_1, 1)$. On choisit $\widetilde{P}(1) = S_1$. De même, si $P(2i) = q^i$, $P(2i + 1) = s(q^i, w(i))$, $P(2i + 2) = q^{i+1}$, $\widetilde{P}(2i) = q^i$, il existe un ensemble S_i tel que $S_i \models_m \widetilde{\delta}(q^i, w(i))$ et $q^{i+1} = \widetilde{s}(q^i, S_i, 2i + 1)$. On choisit alors $\widetilde{P}(2i + 1) = S_i$ (et $\widetilde{P}(2i + 2) = q^{i+1}$).

À nouveau, comme $\widetilde{P}$ et P ont les mêmes positions du joueur 1, si le minimum des rangs des états rencontrés infiniment souvent dans $\widetilde{P}$ est impair, alors le minimum des états rencontrés infiniment souvent dans P est pair et donc le joueur 1 gagne P. □

Le fait que la stratégie du joueur 2 soit locale (et pas sans mémoire) est utile : la construction du lemme ci-dessus ne marche pas pour une stratégie sans mémoire, comme le montre l'exercice ci-dessous :

Exercice 24
Montrer que, si dans la construction du lemme ci-dessus, on définit $\widetilde{s}$ indépendemment du coup précédent du joueur 1 (i.e. $\widetilde{s}(R, 2i + 1)$ est un état q tel que $q \in R \cap S$ pour S modèle minimal de $\delta(q, 2i)$), on n'obtient pas nécéssairement une stratégie gagnante pour le joueur 2 sur le jeu dual. On donnera un exemple dans lequel l'automate $\mathcal{A}$ est faible.

Theorème 29 *Si $\mathcal{A}$ est un automate alternant faible à parité, l'automate dual $\widetilde{\mathcal{A}}$ accepte le complémentaire du langage accepté par $\mathcal{A}$.*