7 Jeux à parité et le théorème de complémentation

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la clôture par complémentaire de la classe des langages reconnus par un automate de Büchi. Nous avons choisi la preuve donnée dans [Tho99] parce qu'elle utilise les automates alternants et permet d'introduire des notions utiles pour la suite, typiquement la vérification en μ-calcul. Il s'agit des conditions d'acceptance à parité, des automates faibles, des jeux à deux joueurs et du théorème de détermination des jeux.

7.1 Jeux à parité

Pour démontrer le résultat de dualité des automates alternants faibles à condition de parité, il est commode de voir le problème en termes de jeux, ce qui d'ailleurs permettra plus loin de classifier certains problèmes de vérification en termes de stratégies gagnantes, puis de se ramener à des problèmes algorithmiques sur des graphes finis.

Un *jeu à parité* est un tuple $G = (Q_1, Q_2, \delta_1, \delta_2, r, q_0)$ où Q_1, Q_2 sont des ensembles d'états finis disjoints, δ_1 est une application de $Q_1 \times \mathbb{N}$ dans 2^{Q_2} et δ_2 est une application de $Q_2 \times \mathbb{N}$ dans 2^{Q_1} telles que $\delta_k(q,i)$ n'est jamais vide. r est une fonction de *rang* de $Q_1 \cup Q_2$ dans $\mathbb{N}$. Enfin, $q_0 \in Q_1$ est l'*état initial*.

Une *configuration* du jeu G est un élément de $Q_1 \times \mathbb{N} \cup Q_2 \times \mathbb{N}$. Une *partie* est un mot infini P sur $Q_1 \cup Q_2$ tel que $w(0) = q_0$ et, si $w(i) = q \in Q_j$, alors $w(i+1) \in \delta_j(q,i)$. Le joueur 1 *gagne la partie* P si le minimum des rangs des états apparaissant infiniment souvent dans P est pair. Sinon, c'est le joueur 2 qui gagne.

Une *stratégie* (sans mémoire) s pour le joueur 1 (resp. le joueur 2) est une application de $Q_1 \times \mathbb{N}$ (resp. $Q_2 \times \mathbb{N}$) dans Q_2 (resp. Q_1) telle que $s(q,i) \in \delta_1(q,i)$ (resp. $\in \delta_2(q,i)$) pour tous q, i.

Un joueur B a une *stratégie gagnante* s'il gagne la partie en appliquant sa stratégie, quels que soient les coups de son adversaire.

Exercice 23
Considérer le jeu G décrit dans la figure 15. Les deux tours de jeu sont figurés respectivement par un carré et un rond dans lesquels sont indiqués les noms des configurations (pour faciliter l'expression des stratégies). Le rang de chaque configuration est figuré à l'extérieur de chaque configuration et les déplacements autorisés sont les arêtes du graphe.

Montrer que le joueur rond a une stratégie gagnante (sans mémoire). Que se passe-t-il si l'on remplace $r(7)$ par 2 ?

Un jeu à parité est *faible* si $r(q') \leq r(q)$ dès que $q' \in \delta_i(q,j)$ pour un certain j. Pour ces jeux particuliers on a alors :

Lemme 24 (déterminisme des jeux à parité faibles) *Pour tout jeu à parité faible, l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante sans mémoire.*

Preuve: Soit A_i^j et B_i^j les ensembles définis par récurrence comme suit (l'intention est de définir ainsi les configurations gagnantes pour A et B respectivement en jouant au plus j coups à un rang supérieur à i) :

- $A_0^0 = \{(q,k) \in Q_1 \times \mathbb{N} \mid r(q) = 0\}$
- $B_0^0 = \emptyset$
- $$\begin{aligned} A_i^{j+1} = \; & A_i^j \\ & \cup \{(q,k) \in Q_1 \times \mathbb{N} \mid A_i^j \cap \delta_1(q,k) \neq \emptyset\} \\ & \cup \{(q,k) \in Q_2 \times \mathbb{N} \mid \delta_2(q,k) \subseteq A_i^j\} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} B_i^{j+1} = \; & B_i^j \\ & \cup \{(q,k) \in Q_1 \times \mathbb{N} \mid \delta_1(q,k) \subseteq B_i^j\} \\ & \cup \{(q,k) \in Q_2 \times \mathbb{N} \mid \delta_2(q,k) \cap B_i^j \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

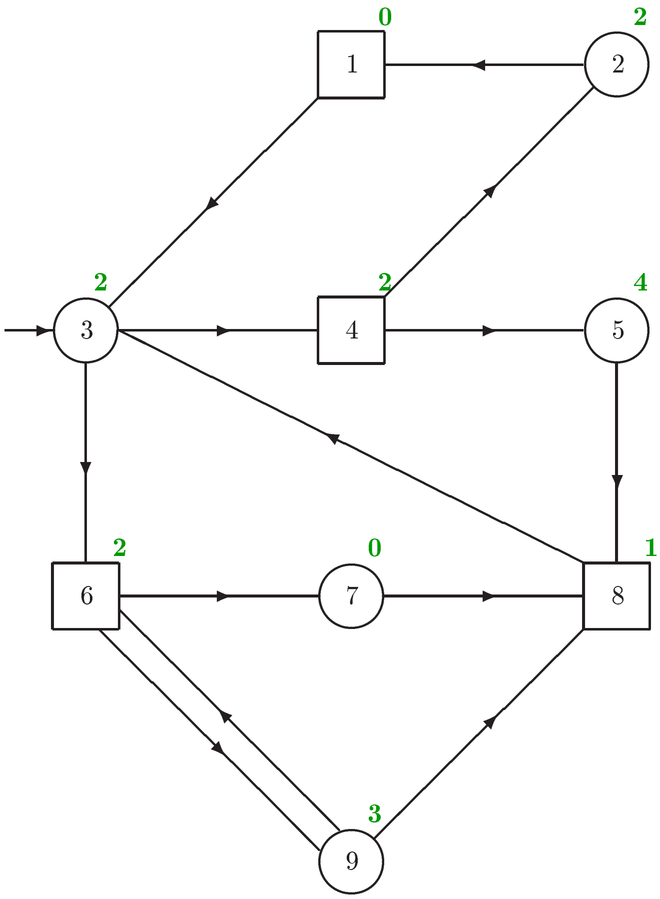

FIG. 15 – Un jeu à parité

– Si i est pair, alors $B^0_{i+1} = \{(q,k) \notin \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{m=0}^{+\infty} A^m_j \mid r(q) = i+1\}$. Si i est impair, $B^0_{i+1} = \emptyset$

– Si i is est pair, alors $A^0_{i+1} = \{(q,k) \notin \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{m=0}^{+\infty} B^m_j \mid r(q) = i+1\}$. Si i est pair, alors $A^0_{i+1} = \emptyset$.

Remarquons que A^j_i, B^j_i ne contiennent que des configurations de rang supérieur ou égal à i, par récurrence sur j et par faiblesse du jeu.

Soit B_i (resp. A_i) l'ensemble $\bigcup_{k\leq i} \bigcup_{j=0}^{+\infty} B^j_k$ (resp. $\bigcup_{k\leq i} \bigcup_{j=0}^{+\infty} A^j_k$).

On montre par récurrence sur i que

– $A_i \cap B_i = \emptyset$,
– $A_i \cup B_i$ contient toutes les configurations de rang inférieur ou égal à i,
– si $(q,k) \in A_i$ (resp. $(q,k) \in B_i$), il existe une stratégie gagnante sans mémoire pour le joueur 1 (resp. pour le joueur 2) pour les parties commençant dans la configuration (q,k).

Pour cela, remarquons d'abord que, pour i pair, B^j_i est vide et que, pour i impair, A^j_i est vide (par récurrence sur j). Si $i = 0$, $B_0 = \emptyset$ et le résultat est prouvé : la stratégie du joueur 1 sur $(q,0)$ est arbitraire. Soit maintenant $i > 0$. Supposons que i est pair (si i est impair, il suffit d'échanger les A et les B). s est la stratégie gagnante pour le joueur A à partir d'une configuration de A_{i-1}. On étend s à A^j_i par récurrence sur j :

– Si $j = 0$, $q \in Q_1$, il exite un successeur de (q,k) qui n'est pas dans B_{i-1}, par définition de A^0_i. On choisit $s(q,k) \notin B_{i-1}$ (si $s(q,k)$ n'est pas déjà défini).
– Si $j > 0$, $q \in Q_1$ et $(q,k) \in A^j_i \setminus A^{j-1}_i$, alors, par définition, $\delta_1(q,k) \cap A^{j-1}_i$ est non vide. On choisit $s(q,k)$ dans cet ensemble (s'il n'est pas déjà défini).

Montrons par récurrence sur j que toute partie commençant dans une configuration de l'un des ensembles A^j_i, et suivant la stratégie s, est gagnante pour le joueur 1. Seul le cas de base $j = 0$ est non trivial. Si une partie commence en $(q,k) \in A^0_i$, avec $q \in Q_1$ alors, par définition de s, la configuration suivante $s(q,k)$ n'est pas dans B_{i-1}. Par faiblesse du jeu, $r(s(q,k)) \leq i$. Donc, ou bien $r(s(q,k)) = i$ et $s(q,k) \in A^0_i$, ou bien $r(s(q,k)) < i$ et, par hypothèse de récurrence, $s(q,k) \in A_{i-1}$ Si maintenant $q \in Q_2$, montrons qu'aucun successeur de (q,k) n'est dans B_{i-1}. On concluera alors comme ci-dessus que la configuration suivante d'une partie commençant par (q,k) est dans $A^0_i \cup A_{i-1}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde : si $(q', k+1) \in B_{i-1}$, alors, il existe $l < i, m$ tels que $(q', k+1) \in B^m_l$. Mais, par définition de B^{m+1}_l, cela implique que $(q,k) \in B^{m+1}_l$, donc $(q,k) \in B_{i-1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous avons donc montré que, dans tous les cas, dans une partie commençant par $(q,k) \in A^0_i$ et suivant la stratégie s, la configuration suivante est dans $A^0_i \cup A_{i-1}$. Alors, ou bien toutes les configurations de la partie sont dans A^0_i et, le rang de toutes les configurations de A^0_i étant le nombre pair i, la partie est gagnée pour le joueur 1. Ou bien, il existe une configuration de la partie qui est dans A_{i-1}. Dans ce cas, par hypothèse de récurrence, la partie est aussi gagnée pour le joueur 1.

$A_i \cap B_i = \emptyset$ car il ne peut exister de stratégie gagnante pour les deux joueurs. Par ailleurs, $A_i \cup B_{i-1}$ contient, par définition de A^0_i et par hypothèse de récurrence, toutes les configurations de rang inférieur ou égal à i.

Maintenant, $W_A = \bigcup_i A_i$ et $W_B = \bigcup_i B_i$ forment une partition de l'ensemble des configurations du jeu et, comme nous l'avons vu, si la configuration initiale est dans W_A (resp. dans W_B), c'est à dire dans l'un des A_i (resp. B_i), alors il existe une stratégie gagnante pour le joueur 1 (resp. le joueur 2). □

Ce résultat se généralise aux jeux à parité, pas nécessairement faibles. Mais la preuve est beaucoup plus difficile (voir par exemple [Tho97] où en fait est montré un résultat plus général : au lieu de damiers "linéaires", les damiers sont arborescents),

7.2 Complémentation des automates alternants faibles avec condition de parité.

Soit $\mathcal{A} = (Q, q^0, \delta, r)$ un automate alternant avec condition de parité.

Lemme 25 (complète spécification) *Si $\mathcal{A}$ est un automate alternant à parité, il existe un automate $\mathcal{A}'$ acceptant le même langage et tel que, pour tout état q et toute lettre d'entrée a, $\delta'(q,a)$ est satisfaisable. $\mathcal{A}'$ se calcule en temps linéaire.*

Preuve: On peut supposer sans perdre de généralité (i.e. au prix d'une translation du rang) que le minimum des rangs est 2. $\mathcal{A}'$ est alors l'automate $\mathcal{A}$ augmenté d'un état poubelle $q_\perp$ de rang 1 et des transitions :

- $\delta'(q_\perp, a) = q_\perp$ pour toute lettre a
- $\delta'(q, a) = q_\perp$ si $\delta(q,a)$ est non spécifié ou insatisfaisable.

Comme dès l'instant qu'on atteint l'état poubelle dans un calcul, celui-ci ne peut être réussi, l'ensemble des calculs réussis de $\mathcal{A}$ est identique à l'ensemble des calculs réussis de $\mathcal{A}'$. □

On supposera donc désormais que $\delta(q,a)$ est toujours satisfaisable.

On associe à $\mathcal{A}$ et à $w \in A^\omega$ un jeu $G(\mathcal{A}, w)$ avec condition de parité comme suit : $Q_1 = Q$, $Q_2 = 2^Q$, $\delta_1(q, 2i)$ est l'ensemble des ensembles d'états S qui satisfont $\delta(q, w(i))$ et $\delta_2(S, 2i+1)$ est l'ensemble S lui-même. Enfin, le rang du jeu associe à chaque état q, $r(q)$ et aux ensembles d'états le rang maximal plus un.

Lemme 26 *Soit $\mathcal{A}$ un automate à parité quelconque. $\mathcal{A}$ accepte w si et seulement si le joueur 1 a une stratégie gagnante sans mémoire pour $G(\mathcal{A}, w)$.*

Preuve: Supposons tout d'abord que $\mathcal{A}$ accepte w : il existe un calcul réussi ρ de $\mathcal{A}$ sur w. Chaque nœud de ce calcul est caractérisé par son étiquette $q \in Q$ et sa profondeur i. La stratégie du joueur 1 consiste alors, depuis $(q, 2i)$ à choisir l'ensemble des étiquettes des fils de $(q, 2i)$ dans l'arbre ρ. La stratégie n'est pas définie pour les paires $(q, 2i)$ qui ne correspondent pas à des nœuds de ρ. En appliquant cette stratégie, le joueur 1 est assuré que la partie sera la séquence des étiquettes d'un chemin infini de ρ : le joueur 2 ne peut que choisir, à partir d'un nœud, le fils qui continuera la partie. Mais, comme pour tous les chemins infinis de ρ, le minimum des rangs des états apparaissant infiniment souvent est pair, le joueur 1 gagne nécessairement la partie.

Réciproquement, si s est une stratégie gagnante pour le joueur 1, on construit un calcul ρ à partir de s : si q étiquette le calcul à une profondeur i, on choisit $s(q, 2i)$ pour construire les successeurs de q dans ρ. □

Si $\mathcal{A}$ est un automate alternant, on note $\widetilde{\mathcal{A}}$ l'*automate dual* défini comme suit : les états de $\widetilde{\mathcal{A}}$ sont les mêmes que ceux de $\mathcal{A}$, l'état initial est le même, les transitions de $\widetilde{\mathcal{A}}$ sont obtenues à partir de celles de $\mathcal{A}$ en remplaçant les conjonctions par des disjonctions et les disjonctions par des conjonctions. Enfin, la fonction de rang $\tilde{r}$ est définie par

$$\begin{cases} \tilde{r}(q) = r(q) + 1 & \text{Si le rang minimal est pair} \\ \tilde{r}(q) = r(q) - 1 & \text{Si le rang minimal est impair} \end{cases}$$

Lemme 27 *Pour tout automate à parité $\mathcal{A} = \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}$.*

$\widetilde{\mathcal{A}}$ est un automate à parité faible dès que $\mathcal{A}$ est un automate à parité faible. Nous allons montrer qu'il accepte le complémentaire du langage accepté par $\mathcal{A}$ dans ce cas.

Nous appelerons *stratégie locale* une stratégie qui tient compte à la fois de la configuration du jeu et du dernier coup joué par l'adversaire.

Lemme 28 *Supposons que $\mathcal{A}$ est un automate alternant (quelconque) avec condition de parité. Si le joueur 1 a une stratégie gagnante sans mémoire sur $G(\mathcal{A}, w)$, si et seulement si le joueur 2 une stratégie gagnante locale sur $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$.*

Preuve: Soit s la stratégie gagnante du joueur 1. Soit $s(q, 2i) = S$ et $\tilde{\delta}(q, w(i)) = \phi$. On peut supposer sans perdre de généralité que S est minimal. Prouvons tout d'abord que, pour tout modèle R de ϕ, il existe un état $q_{i,R} \in S$ tel que $q_{i,R} \in R$. Supposons par exemple que ϕ est en forme normale conjonctive. Alors S est l'une des disjonctions d'états. Comme tout modèle de ϕ contient au moins un état par disjonction, $R \cap S \neq \emptyset$.

On définit maintenant la stratégie du joueur 2 comme suit : si $s(q, 2i) = S$ et R est un ensemble d'états tel que $R \models \widetilde{\delta}(q, w(i))$, alors $\widetilde{s}(q, R, 2i+1)$ est un état q' tel que $q' \in R \cap S$. Un tel état existe d'après ce que nous venons de voir. La stratégie est quelconque (indéfinie) pour les autres valeurs de $q, R, 2i+1$.

Montrons que $\widetilde{s}$ est gagnante pour le joueur 2. Plus précisément, montrons que, pour toute partie $\widetilde{P}$ jouée suivant $\widetilde{s}$ dans $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$, il existe une partie P jouée suivant s dans $G(\mathcal{A}, w)$ telle que les séquences de positions du joueur 1 dans P et dans $\widetilde{P}$ sont identiques.

On construit $P(i)$ par récurrence sur i. $P(0) = q^0 = \widetilde{P}(0)$. $P(1) = s(q^0, 0)$. Si $P(2i) = q$, $s(q, 2i) = S = P(2i+1)$, $\widetilde{P}(2i) = q$, $\widetilde{P}(2i+1) = R$, alors, par définition de $\widetilde{s}$, $\widetilde{P}(2i+2) \in R \cap S$ et le joeur 2 peut choisir $P(2i+2) = \widetilde{P}(2i+2)$ sur le jeu $G(\mathcal{A}, w)$. On pose ensuite $P(2i+3) = s(\widetilde{P}(2i+2), 2i+2)$.

P est une partie gagnante pour le joueur 1, puisqu'elle suit la stratégie s, donc le minimum des rangs des états rencontrés infiniment souvent est pair. Il en résulte que le minimum des rangs des états rencontrés infiniment souvent dans $\widetilde{P}$ est impair ($r(q)$ et $\widetilde{r}(q)$ sont de parité contraires). Donc que $\widetilde{P}$ est gagnante pour le joueur 2.

Réciproquement, supposons que le joueur 2 a une stratégie locale gagnante sur le jeu dual. On définit la stratégie s de la manière suivante :

$$s(q, 2i) = \{\widetilde{s}(q, S, 2i+1) \mid S \models_m \widetilde{\delta}(q, w(i))\}$$

où $S \models_m \phi$ ssi $S \models \phi$ et S est minimal.

Montrons d'abord que $s(q, 2i) \models \delta(q, w(i))$ et donc est un choix possible pour le joueur 1. Si $\delta(q, w(i)) = \bigwedge_i \bigvee_j q_{i,j}$, les modèles minimaux possibles de $\widetilde{\delta}(1, w(i))$ sont les ensembles $S_i = \{q_{i,1}, \ldots, q_{i,m_i}\}$. Soit $\widetilde{s}(q, S_i, 2i+1) = q_{i,\alpha(i)}$. L'ensemble des états $q_{i,\alpha(i)}$ est bien un modèle de $\delta(q, w(i))$.

Cette stratégie est gagnante et sans mémoire pour le joueur 1 : on construit comme ci-dessus une partie $\widetilde{P}$ suivant $\widetilde{s}$ à partir d'une partie P suivant s, dont les ensembles de positions du joueur 1 sont identiques à celles de $\widetilde{P}$. Par récurrence sur i : $P(0) = \widetilde{P}(0) = q^0$, $P(1) = s(q^0, w(0))$. Si $P(2) = q^1$, par définition, il existe un ensemble S_1 tel que $S_1 \models_m \widetilde{\delta}(q^0, w(0))$ et $q^1 = \widetilde{s}(q_0, S_1, 1)$. On choisit $\widetilde{P}(1) = S_1$. De même, si $P(2i) = q^i$, $P(2i+1) = s(q^i, w(i))$, $P(2i+2) = q^{i+1}$, $\widetilde{P}(2i) = q^i$, il existe un ensemble S_i tel que $S_i \models_m \widetilde{\delta}(q^i, w(i))$ et $q^{i+1} = \widetilde{s}(q^i, S_i, 2i+1)$. On choisit alors $\widetilde{P}(2i+1) = S_i$ (et $\widetilde{P}(2i+2) = q^{i+1}$).

À nouveau, comme $\widetilde{P}$ et P ont les mêmes positions du joueur 1, si le minimum des rangs des états rencontrés infiniment souvent dans $\widetilde{P}$ est impair, alors le minimum des états rencontrés infiniment souvent dans P est pair et donc le joueur 1 gagne P. □

Le fait que la stratégie du joueur 2 soit locale (et pas sans mémoire) est utile : la construction du lemme ci-dessus ne marche pas pour une stratégie sans mémoire, comme le montre l'exercice ci-dessous :

Exercice 24
Montrer que, si dans la construction du lemme ci-dessus, on définit $\widetilde{s}$ indépendemment du coup précédent du joueur 1 (i.e. $\widetilde{s}(R, 2i+1)$ est un état q tel que $q \in R \cap S$ pour S modèle minimal de $\delta(q, 2i)$), on n'obtient pas nécéssairement une stratégie gagnante pour le joueur 2 sur le jeu dual. On donnera un exemple dans lequel l'automate $\mathcal{A}$ est faible.

Theorème 29 *Si $\mathcal{A}$ est un automate alternant faible à parité, l'automate dual $\widetilde{\mathcal{A}}$ accepte le complémentaire du langage accepté par $\mathcal{A}$.*

Preuve: Si $w \in L(\mathcal{A})$, d'après le lemme 26, le joueur 1 a une stratégie gagnante sans mémoire sur $G(\mathcal{A}, w)$ et, d'après le lemme 28, le joueur 2 a une stratégie locale gagnante sur $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$. Il en résulte que le joueur 1 n'a pas de stratégie gagnante sur $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$ et en particulier pas de stratégie sans mémoire. Par le lemme 26, $w \notin L(\widetilde{\mathcal{A}})$. Donc $L(\mathcal{A}) \cap L(\widetilde{\mathcal{A}}) = \emptyset$.

Si maintenant w est un mot quelconque sur l'alphabet A, par le lemme 24, l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante sans mémoire sur le jeu $G(\widetilde{\mathcal{A}}, w)$. S'il s'agit du joueur 1, par le lemme 26, $w \in L(\widetilde{\mathcal{A}})$. S'il s'agit du joueur 2, alors le joueur 1 a une stratégie gagnante sans mémoire sur $G(\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}, w)$ d'après le lemme 28 et puisque toute stratégie sans mémoire est locale. Mais, d'après le lemme 27 et le lemme 26, $w \in L(\mathcal{A})$ dans ce cas. Ainsi, dans tous les cas, $w \in L(\mathcal{A}) \cup L(\widetilde{\mathcal{A}})$: $A^\omega = L(\mathcal{A}) \cup L(\widetilde{\mathcal{A}})$. □

Ce théorème se généralise en fait aux automates à parité quelconques, si l'on admet le résultat de déterminisme des jeux analogue au lemme 24 sans la condition de faiblesse.

7.3 Complémentation des automates de Büchi

Lemme 30 *Si $\mathcal{A}$ est un automate alternant faible avec condition de parité, on peut calculer en temps exponentiel un automate de Büchi qui accepte le même langage.*

Preuve: Elle est semblable à la preuve du lemme 16 à laquelle il faut se reporter pour plus de détails. Si $\mathcal{A} = (Q, q^0, \delta, r)$, l'automate de Büchi $\mathcal{A}'$ a pour ensemble d'états les paires (S, S') où S et S' sont des sous-ensembles de Q. La fonction de transition est définie par :

Si $S_1 \neq \emptyset$, $(S_1, S_1') \xrightarrow{a} (S_2, S_2')$ si :

Pour tout $q \in S_1 \cup S_1'$, il existe un ensemble $S_q \subseteq Q$ tel que $S_q \models \delta(q, a)$ et

- $S_2 = (\bigcup_{q \in S_1} S_q) \setminus Q_0$ où Q_0 est l'ensemble des états de rang pair.
- $S_2' = (\bigcup_{q \in S_1'} S_q) \cup ((\bigcup_{q \in S_1} S_q) \cap Q_0)$

Si $S_1 = \emptyset$, $(S_1, S_1') \xrightarrow{a} (S_2, S_2')$ si $S_2' = \emptyset$ et $S_2 = \bigcup_{q \in S_1'} S_q$ où S_q est un ensemble d'états qui satisfait $\delta(a, q)$.

Les états finaux sont ceux tels que $S = \emptyset$. L'état initial est $(\{q^0\}, \emptyset)$ □

Exercice 25
Montrer par un exemple que la construction du lemme ci-dessus n'est pas correcte dans le cas où l'automate alternant à parité n'est pas faible.

Theorème 31 *La classe des langages reconnus par un automate de Büchi est effectivement close par complémentaire.*

Preuve: C'est une conséquence des lemmes 23, 30 et du théorème 29. □

7.4 Recherche de stratégies gagnantes sur les jeux finis

Un jeu est dit *fini* si les relations de transitions des deux joueurs (δ_1 et δ_2) ne dépendent pas du second argument.

Exercice 26
Démontrer le lemme de détermination des jeux sans la condition de faiblesse, dans le cas d'un jeu fini.

On considère dans ce paragraphe des jeux finis et on s'intéresse à la complexité de la recherche de stratégies gagnantes. Ce problème est lié à la vérification de modèles (finis) et au problème d'accessibilité dans les graphes ET/OU.

Un graphe (dirigé) ET/OU est un ensemble de sommets S, un ensemble d'arêtes $R \subseteq S \times S$, ainsi qu'une application e de S dans $\{\wedge, \vee\}$. Etant donné un graphe ET/OU G, on note $\xrightarrow[G]{*}$ la relation *d'accessibilité* définie par : $\xrightarrow[G]{*}$ est le plus petit sous-ensemble de $S \times 2^S$ tel que :

- si $s^0 \in S_1$, alors $s^0 \xrightarrow[G]{*} S_1$
- si $e(s^0) = \vee$ et il existe un sommet s^1 tel que $(s^0, s^1) \in R$ et $s^1 \xrightarrow[G]{*} S_1$, alors $s^0 \xrightarrow[G]{*} S_1$
- si $e(s^0) = \wedge$ et pour tout sommet s^1 tel que $(s^0, s^1) \in R$, $s^1 \xrightarrow[G]{*} S_1$, alors $s^0 \xrightarrow[G]{*} S_1$.

Theorème 32 *L'accessibilité dans un graphe ET/OU est décidable en temps linéaire.*

Preuve: Etant donné un ensemble de sommets S_1, on calcule le plus petit point fixe de l'application qui à S associe l'ensemble des sommets desquels on peut accéder à S en au plus une étape. Plus précisément :

1. Initialement, $S = S_1$, $T = S_1$
2. Tant que $T \neq \emptyset$:
   - On calcule l'ensemble T des sommets s qui ne sont pas dans S et tels que
     - Ou bien $e(s) = \vee$ et l'un des successeurs de s est dans S.
     - Ou bien $e(s) = \wedge$ et tous les successeurs de s sont dans S
   - On remplace S par $T \cup S$
3. $s^0 \xrightarrow[G]{*} S_1$ si et seulement si $s^0 \in S$

Remarquons que cet algorithme naïf de calcul de point fixe est bien polynômial. Mais on peut trouver un algorithme linéaire en étant un peu plus rusé, que nous expliquons ci-dessous.

On peut tout d'abord se ramener, en temps linéaire, au cas où chaque sommet du graphe a un degré sortant au plus deux.

A chaque sommet s du graphe est attaché un quadruplet (e(s),val(s),flag(s),ancestors(s)). $e(s) \in \{\wedge, \vee\}$, $val(s), flag(s) \in \{\textbf{true}, \textbf{false}\}$ et ancestors(s) est la liste des sommets tels qu'il existe une arête (s', s) dans le graphe. Initialement, flag(s) =**false** pour tous les sommets ayant deux successeurs et flag(s)=**true** pour les sommets ayant 0 ou 1 successeur. val(s) =**true** si et seulement si $s \in S_1$. Cette construction peut être effectuée en temps linéaire.

On maintient ensuite une pile P. Initialement, P contient les sommets de S_1. L'algorithme procède comme suit :

Tant que la pile P est non vide :

1. retirer le sommet de pile s.
2. pour chacun des sommets t de ancestors(s) faire :
   (a) Si $val(t) = \textbf{true}$, ne rien faire
   (b) Si $e(t) = \vee$ et $val(t) = \textbf{false}$, alors mettre à jour $val(t)$ à **true** et empiler t sur P
   (c) Si $e(t) = \wedge$ et $flags(t) = \textbf{true}$, alors mettre à jour $val(t)$ à **true** et empiler t sur P
   (d) Si $e(t) = \wedge$ et $flags(t) = \textbf{false}$, alors mettre à jour $flags(t)$ à **true**.

Si la pile P est vide, les sommets s desquels on peut accéder à S_1 sont ceux tels que $val(s) = \textbf{true}$ et l'algorithme s'arrête

On vérifie que l'algorithme est linéaire : chaque sommet est empilé au plus une fois et, pour chaque sommet dépilé s, le nombre de mises à jour est proportionnel au nombre d'ancêtres de s ; au total, le nombre de mises à jour est proportionnel au nombre d'arêtes.

Remarquons que, en cas d'accessibilité, on peut effectivement calculer un "chemin" en temps linéaire. Un tel chemin c associe à chaque sommet t tel que $e(t) = \vee$ un successeur à partir duquel S_1 est accessible. Dans la présentation ci-dessus, il suffit dans le cas 2b de garder $c(t) = s$.

□

En fait, le problème est complet pour PTIME, mais ce résultat est admis ici.

Theorème 33 *Supposant l'ensemble d'états fini, on peut décider quel joueur a une stratégie gagnante dans un jeu à parité faible en temps linéaire (et calculer cette stratégie).*

Preuve: On montre par récurrence sur le rang maximal d'une configuration que l'on peut calculer en temps linéaire, pour chaque configuration q, quel est le joueur qui a une stratégie gagnante à partir de q et aussi donner effectivement cette stratégie.

Si tous les états sont de même rang, le joueur 1 a une stratégie gagnante si et seulement si ce rang est pair. Dans ce cas, la stratégie gagnante est arbitraire.

Supposons maintenant que M est le rang maximal. On décompose les positions du jeu en $Q_0 \uplus \ldots \uplus Q_R$, Q_i étant l'ensemble des configurations de rang i. Le jeu étant faible la restriction des transitions aux configurations de $Q_0 \uplus \ldots \uplus Q_{M-1}$ est encore un jeu à parité faible lorsque la configuration initiale est choisie parmi ces états. Par hypothèse de récurrence, on peut supposer associé à chacun des états $q \in Q_0 \uplus \ldots \uplus Q_{M-1}$ le joueur gagnant $J(q)$ à partir de cet état et sa stratégie $S(q)$.

Considérons alors le graphe ET/OU dont les sommets sont les configurations Q_M plus deux sommets particuliers 1 et 2. Les arêtes sont données par les relations de transition : pour $s, s' \in Q_M$, $(s, s') \in R$ si et seulement si $s' \in \delta_i(s)$. De plus, si $s' \in \delta_i(s)$ et $r(s') < M$, alors on ajoute l'arête $(s, J(s'))$. $e(s)$ est $\vee$ si s est une configuration dans laquelle c'est au joueur 1 de jouer. $e(s)$ est $\wedge$ sinon. Si 1 est accessible à partir de q, alors le joueur 1 a une stratégie gagnante à partir de q. Si 2 est accessible à partir de q, dans le graphe dual (où les $\wedge$ et les $\vee$ sont échangés) alors le joueur 2 a une stratégie gagnante à partir de q. Si ni 1 ni 2 ne sont accessibles à partir de q dans G et le graphe dual respectivement, alors, ou bien M est pair et le joueur 1 a une stratégie gagnante, ou bien M est impair et le joueur 2 a une stratégie gagnante.

Comme, d'après le théorème 32, l'ensemble des sommets desquels 1 est accessible (resp. 2) peut être calculé en temps linéaire, on peut calculer $J(q)$ pour $q \in Q_M$ en temps linéaire.

De plus, la stratégie du joueur 1 (par exemple) est fournie par le chemin qui permet d'accéder à 1, dans le cas où 1 est accessible. Dans l'autre cas (1 n'est pas accessible dans le graphe, 2 n'est pas accessible dans le graphe dual et M est pair), il suffit d'associer à chaque sommet $\wedge$ du graphe dual un des sommets successeurs qui n'est pas étiqueté par **true**. □

Comme conséquence du théorème 33 et du lemme 26 :

Corollaire 34 *Le problème du vide pour les automates alternants à parité faibles sur un alphabet à une lettre peut être résolu en temps linéaire.*

Theorème 35 *Supposant l'ensemble d'états fini, déterminer si le joueur 1 a une stratégie gagnante dans un jeu à parité est dans NP $\cap$ co-NP.*

Preuve: On devine la stratégie ainsi que l'ensemble S des états de rang pair minimal rencontrés infiniment souvent. Vérifier que la stratégie est gagnante revient à décider que l'on peut atteindre S dans un graphe ET/OU, puis que l'on peut atteindre S à partir d'un état de S, dans le même graphe. Comme l'accessibilité dans un graphe ET/OU est polynômial (théorème 32), cette vérification se fait en temps polynômial. Il en résulte que le problème est dans NP. Par détermination des jeux à parité, le joueur 1 n'a pas de stratégie gagnante si et seulement si le joueur 2 a une stratégie gagnante, ce qui est dans NP à nouveau. Donc le problème est dans NP $\cap$ co-NP. □

Comme conséquence du théorème 33 et du lemme 26 :

Corollaire 36 *Le problème du vide pour les automates alternants avec condition de parité sur un alphabet à une lettre est dans NP $\cap$ co-NP.*

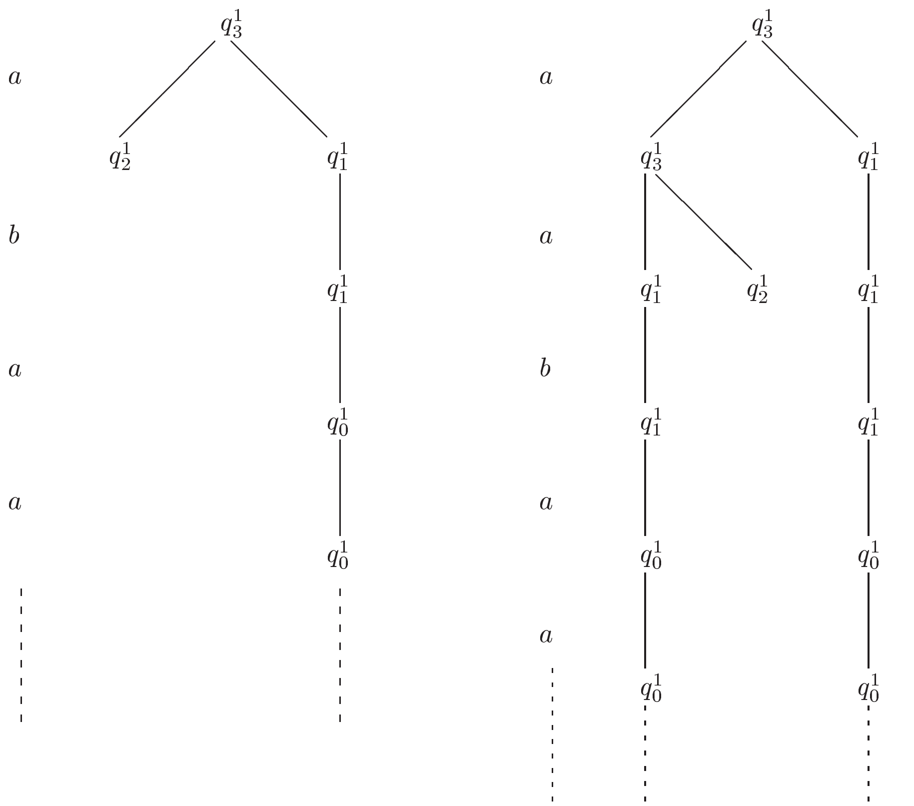

FIG. 16 – Calculs sur aba^ω et sur $aaba^\omega$

Solutions des exercices

Exercice 13:

Soit $w \in A^\omega$. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^c$ ont un seul et même calcul ρ sur w. ρ contient une infinité d'états finaux de $\mathcal{A}$ ssi ρ se termine par q_f^ω pour un certain $q_f \in Q_f$ (car l'automate est faible) ssi ρ ne contient qu'un nombre fini d'états de $Q \setminus Q_f$ ssi w n'est pas accepté par $\mathcal{A}^c$

Exercice 14:

On remarque d'abord que la construction du lemme 16 préserve la faiblesse en utilisant l'ordre sur les paires d'ensembles :

$$(S_1, S_2) > (S_1', S_2') \qquad \text{ssi} \qquad S_1 \uplus S_2 \gg S_1' \uplus S_2'$$

où $\gg$ est l'extension (multi)-ensembliste de l'ordre sur les états, $\uplus$ étant l'union multi-ensembliste.

Il suffit donc d'exhiber un langage Büchi-reconnaissable qui n'est pas reconnu par un automate de Büchi non-déterministe faible. Soit $L = (ab)^\omega$. S'il était reconnu par un automate faible, il existerait un calcul réussi de la forme wq^ω. q doit alors être un état final, et l'automate doit comporter une boucle de q sur lui-même, en lisant a ou b. Mais alors il existerait un mot w_0 tel que w_0a^ω serait dans le langage, ce qui est absurde.

Exercice 15:

L'automate est faible. Les calculs sur aba^ω et sur $aaba^\omega$ sont donnés dans la figure 16.

Mots acceptés depuis les états :

$$\begin{array}{lcl} q_2^1 & : & b(a+b)^\omega \\ q_2^2 & : & a(a+b)^\omega \\ q_0^1 & : & a^\omega \\ q_1^1 & : & (a+b)^* a^\omega \\ q_3^1 & : & aa^* b(a+b)^* a^\omega \end{array}$$

Exercice 16:

$$\begin{array}{lcl} q_0 & \xrightarrow{a} & q_1 \\ q_1 & \xrightarrow{b} & q_0 \end{array}$$

avec $r(q_0) = r(q_1) = 0$.

Exercice 17:

On utilise la construction du théorème 17, avec

$r(\mathbf{X}\phi) = r(\phi)$

$r(P) = r(\neg P) = 0$

$r(\phi \wedge \psi) = r(\phi \vee \psi) = \max(r(\phi), r(\psi))$

$r(\phi\, \mathcal{U} \psi)$ est le plus petit entier impair supérieur ou égal à $r(\phi)$ et à $r(\psi)$

$r(\neg(\phi\, \mathcal{U} \psi))$ est le plus petit entier pair supérieur ou égal à $r(\phi)$ et à $r(\psi)$

Exercice 19:

$$\begin{array}{lcl} q_1^1 & \xrightarrow{a} & q_3^0 \vee q_2^1 \\ q_2^1 & \xrightarrow{b} & q_1^1 \\ q_3^0 & \xrightarrow{a} & q_3^0 \end{array}$$

Le rang est en exposant de l'état et l'état initial est q_1^1

Exercice 20:

Si $q \xrightarrow{a} q'$ on a les transitions $q^2 \xrightarrow{a} q'^2 \wedge q'^1$, $q^1 \xrightarrow{a} q'^1$ si $q^1 \notin Q_f$, $q^1 \xrightarrow{a}$ **true** si $q^1 \in Q_f$.

Exercice 22:

On considère l'automate $\mathcal{A}_k$ à $2k+1$ états tel que les états pairs sont les états finaux, les états impairs ne sont pas finaux et $q_{2i+1} \xrightarrow{a} q_{2i+1}$, $q_{2i+1} \xrightarrow{a} q_{2i+2}$, $q_{2i+2} \xrightarrow{a} q_{2i+3}$, pour les indices pour lesquels ces transitions sont définies. On montre alors que $\mathcal{A}_k$ n'accepte aucun mot, alors que l'automate alternant à parité construit accepte a^ω.

Par exemple, pour $k = 2$, on obtient le calcul acceptant de la figure 17.

Exercice 23:

$3 \to 6$, $9 \to 6$ est gagnante pour $\circ$ qui ne laisse à l'adversaire que deux choix possibles : la boucle 6,9 (gagnante pour $\circ$ puisque le minimum des rangs ... est 2) et la boucle 3,6,7,8 qui est elle aussi gagnante (min 0).

Si on remplace $r(7)$ par 2, $\Box$ a une stratégie gagnante : $6 \to 7$, $4 \to 5$, qui force l'une des boucles 3,4,5,8 ou 3,6,7,8 à se répéter.

Exercice 24:

On considère un automate sur un alphabet à une lettre, défini comme suit, avec la stratégie s du joueur 1 :

	δ	s
q_2	$(q_1 \wedge q_2) \vee (q_0 \wedge q_1')$	q_1, q_2
q_1	$q_0 \vee (q_1 \wedge q_1')$	q_0
q_1'	q_1'	q_1'
q_0	q_0	q_0

On vérifie que s est gagnante pour 1, le rang étant donné par les indices et l'état initial étant q_2.

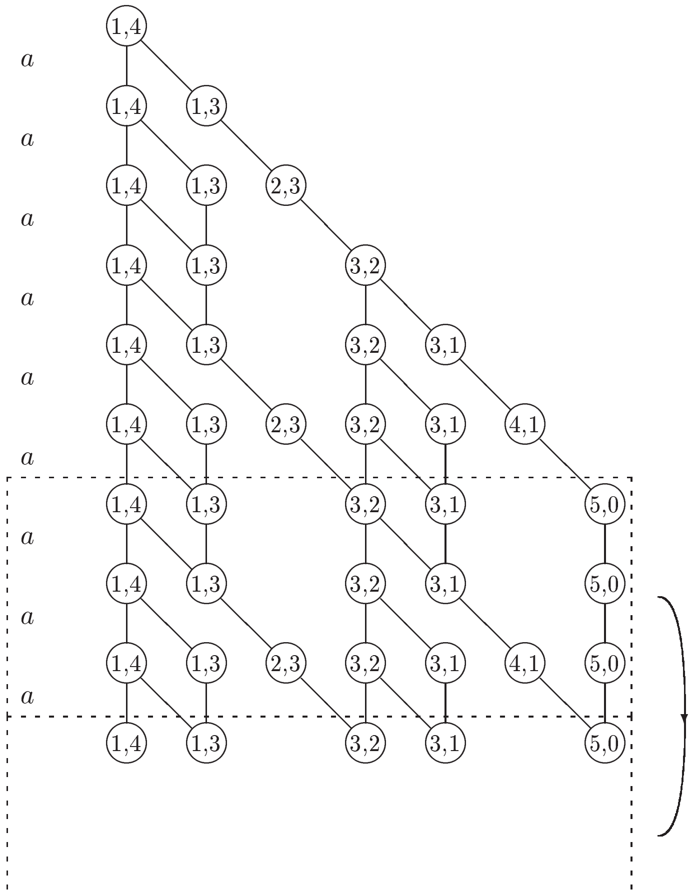

Fig. 17 – Un calcul acceptant sur a^ω

$R = \{q_0, q_1\} \models \widetilde{\delta}(q_2)$ et $R \models \widetilde{\delta}(q_1)$. $\widetilde{s}$ est alors définie (entre autres) par $\widetilde{s}(\{q_0, q_1\}) \in s(q_2) \cap R$ et donc $\widetilde{s}(\{q_0, q_1\}) = q_1$. Cette stratégie n'est pas gagnante puique, si le joueur 1 choisit toujours $\{q_0, q_1\}$ on obtient une partie $q_2 \cdot R \cdot (q_1 \cdot R)^\omega$ qui est perdante pour 2 sur le jeu dual.

Exercice 25:

Soit $\mathcal{A}$ l'automate à deux états $q_1 \xrightarrow{b} q_1$, $q_1 \xrightarrow{a} q_0$, $q_0 \xrightarrow{a} q_0$, $q_0 \xrightarrow{b} q_1$, le rang étant l'indice de l'état. L'état initial est q_1.

L'automate de Büchi calculé suivant le lemme 30 est donné par :

	a	b
$\{q_1\}, \emptyset$	$(\emptyset, \{q_0\}) \vee (\{q_1\}, \{q_0\})$	$(\{q_1\}, \emptyset) \vee (\{q_1\}, \{q_0\})$
$\emptyset, \{q_0\}$	$(\{q_0\}, \emptyset) \vee (\{q_0, q_1\}, \emptyset)$	$(\{q_1\}, \emptyset) \vee (\{q_0, q_1\}, \emptyset)$
$\{q_1\}, \{q_0\}$	$\emptyset, \{q_0, q_1\}$	$(\{q_1\}, \{q_1\}) \vee \cdots$
$\{q_0\}, \emptyset$	$(\emptyset, \{q_0\}) \vee \cdots$	$(\{q_1\}, \emptyset) \vee \cdots$
$\{q_0, q_1\}, \emptyset$	$\cdots$	$\cdots$
$\emptyset, \{q_0, q_1\}$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$		

Cet automate accepte $(aab)^\omega$, grâce au calcul acceptant $((\{q_1\}, \emptyset)(\emptyset, q_0)(0, \emptyset))^\omega$.

Exercice 26:

On note

$$\begin{cases} \mathsf{Attr}_0^a(S) = S \\ \mathsf{Attr}_{k+1}^a = \{q \in Q_a \mid \delta(q) \cap \mathsf{Attr}_k^a(S) \neq \emptyset\} \\ \qquad \cup \{q \in Q_b \mid \delta(q) \subseteq \mathsf{Attr}_k^a(S)\} \\ \mathsf{Attr}_a(S) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathsf{Attr}_i^a(S) \end{cases}$$

Remarquons que, si $S \subseteq G$, $G \setminus \mathsf{Attr}_a(S)$ est un sous-jeu (i.e. si on restreint les positions de G à celles qui ne sont pas dans $\mathsf{Attr}_a(S)$ et les transitions à celles qui ne vont pas dans $\mathsf{Attr}_a(S)$, on obtient encore un jeu). En effet :

- Si $q \in (G \setminus \mathsf{Attr}_a(S)) \cap Q_a$, alors $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_a(S) = \emptyset$
- Si $q \in (G \setminus \mathsf{Attr}_a(S)) \cap Q_b$, alors $\delta(q) \not\subseteq \mathsf{Attr}_a(S)$ et donc b a au moins un coup possible qui reste dans $G \setminus \mathsf{Attr}_a(S)$.

On montre le résultat par récurrence sur le nombre d'éléments de G. Si G est vide, le résultat est montré. Soit maintenant q_0 un état de rang minimal de G. Soit a le joueur gagnant quand le minimum des rangs des états visités infiniment souvent est de même parité que q_0. Soit $G_1 = G \setminus \mathsf{Attr}_a(q_0)$. q_0 n'est pas une position de G_1, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : $G_1 = W_a \uplus W_b$ où W_a (resp. W_b) est un ensemble de positions desquelles a (resp. b) a une stratégie gagnante sans mémoire dans le jeu G_1. On notera s_a (resp. s_b) les stratégies correspondantes.

Remarquons que, si $q \in W_b \cap Q_a$, $\delta(q) \subseteq W_b$. En effet, par définition de W_a, W_b, $\delta(q) \cap W_a = \emptyset$ et, comme $q \notin \mathsf{Attr}_a^G(q_0)$, $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_a^G(q_0) = \emptyset$. De même, si $q \in Q_a \cap \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$, alors $\delta(q) \subseteq \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$. ($\mathsf{Attr}_b^G(W_b)$ est un piège pour a).

1er cas : $q_0 \notin \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$

Dans ce cas, on montre que $\mathsf{Attr}_b^G(W_b) = W_b$, que W_b est un ensemble de positions gagnantes pour b et son complémentaire est un ensemble de positions gagnantes pour a.

Pour le premier point ($W_b = \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$), il suffit de montrer que $W_b = \mathsf{Attr}_1^b(W_b)$.

- Tout d'abord, si $q \in W_a \cap Q_a$, $\delta_{G_1}(q) \cap W_a \neq \emptyset$ et donc $\delta(q) \cap W_a \neq \emptyset$, donc $\delta(q) \not\subseteq W_b$ et $q \notin \mathsf{Attr}_1^b(W_b)$.
- Si $q \in W_a \cap Q_b$, $\delta_{G_1}(q) \not\subseteq W_b$ et donc $q \notin \mathsf{Attr}_1^b(W_b)$
- Si $q \in \mathsf{Attr}_{n+1}^a(q_0) \cap Q_a$, alors, par définition, $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_n^a(q_0) \neq \emptyset$ et donc $\delta(q)$ contient au moins une position qui n'est pas une position de G_1
- Si $q \in \mathsf{Attr}_{n+1}^a(q_0) \cap Q_b$, alors $\delta(q) \subseteq \mathsf{Attr}_n^a(q_0)$ qui est d'intersection vide avec W_b
- Si $q = q_0$, par hypothèse, $q \notin W_b$

Maintenant, si $q \in W_b$, la stratégie gagnante pour b consiste à utiliser s_b : W_b est un piège pour a car il n'existe pas de mouvement de a vers $\mathsf{Attr}_a^G(q_0)$ par définition de $\mathsf{Attr}_a^G(q_0)$ et il n'existe pas de mouvement de a vers W_a sinon la position serait gagnante pour a dans G_1

Si $q \notin W_b$, et $q \in Q_b$, $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_b^G(W_b) = \emptyset$ (en fait, $G \setminus \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$ est un piège pour b). Si $q \in Q_a$, on définit s par :

- Si $q \in \mathsf{Attr}_{n+1}^a(q_0)$, $\delta(q) \cap \mathsf{Attr}_n^a(q_0) \neq \emptyset$ et on choisit $s(q)$ dans cet ensemble
- Si $q = q_0$ on choisit $s(q)$ hors de $\mathsf{Attr}_b^G(W_b)$
- Si $q \in W_a$, $q \notin \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$, $q \notin \mathsf{Attr}_a^G(q_0)$, alors on choisit $s(q) = s_a(q)$.

La stratégie est gagnante pour a car :

- $G \setminus W_b$ est un piège pour b et a force à rester dans cet ensemble de positions.
- Suivant sa stratégie, toute partie ou bien reste ultimement dans W_a et est donc gagnante pour a, ou bien passe infiniment souvent par $\mathsf{Attr}_a^G(q_0)$ et donc infiniment souvent par q_0. Dans ce cas, la partie est à nouveau gagnante pour a puisque q_0 est de rang minimal.

2ème cas : $q_0 \in \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$

Dans ce cas, $G_2 = G \setminus \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$ est un sous-jeu de cardinal strictement plus petit que celui de G ; on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G_2. Soit W'_a et W'_b une partition des positions de G_2 telle que a a une stratégie gagnante s_2^a sur G_2 depuis une position de W'_a et b a une stratégie gagnante s_2^b depuis une position de W'_b. Remarquons que :

$$\begin{cases} q \in W'_a \cap Q_b & \Rightarrow \quad \delta(q) \subseteq W'_a \\ q \in W'_b \cap Q_a & \Rightarrow \quad \delta(q) \subseteq W'_b \\ q \in W'_a \cap Q_a & \Rightarrow \quad \delta(q) \cap W'_a \neq \emptyset \end{cases}$$

On montre alors que $W'_b \cup \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$ est un ensemble de positions gagnantes pour b, alors que son complémentaire, W'_a, est un ensemble de positions gagnantes pour a. En effet :

- Si $q \in W'_b \cup \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$, alors
  - a est piégé dans cet ensemble
  - Si $q \in W_b$, b joue suivant s_b et reste dans W_b (donc gagne)
  - Si $q \in \mathsf{Attr}_b^G(W_b)$, b joue de manière à se rapprocher de W_b (et y parvient en un nombre fini de coups)
- Si $q \in W'_a$, la stratégie de a consiste à appliquer s'_a, qui force à rester dans cet ensemble.