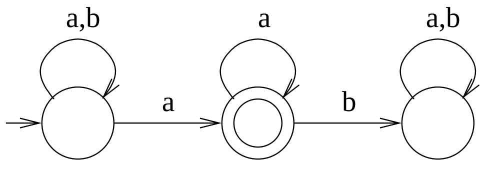

Fig. 12 – Un automate de Büchi acceptant $(a + b)^* a^\omega$

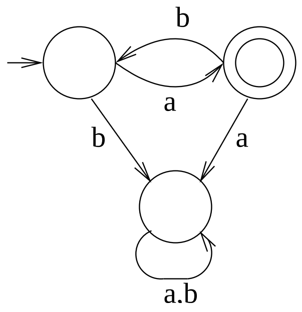

Fig. 13 – Un automate de Büchi déterministe acceptant $(ab)^\omega$

6 Automates alternants faibles

6.1 Quelques remarques sur les automates de Büchi

Tout d'abord, il n'est pas toujours possible de déterminiser un automate de Büchi :

Exercice 11
Montrer qu'il n'existe aucun automate de Büchi déterministe qui accepte le langage défini par l'automate non-déterministe de la figure 12.

En fait, ce problème de non-déterminisme va pouvoir être résolu grâce aux automates alternants : les automates non-déterministes correspondent à des automates alternants ne comportant que des disjonctions dans les transitions (et pas de conjonction). L'introduction de formules Booléennes positives arbitraires permet de symétriser les transitions et on peut donc espérer que la complémentation est plus simple.

Mais il existe un deuxième problème orthogonal, lié à la condition d'acceptance de Büchi elle-même :

Exercice 12
Montrer que, pour chacun des automates donnés dans les figures 13 et 14, bien que déterministes, il ne suffit pas d'échanger les états finaux et non finaux pour obtenir un automate qui reconnaisse le complémentaire.

Ces exemples montrent que le problème de complémentation ne peut être traîté comme dans le cas des automates de mots finis.

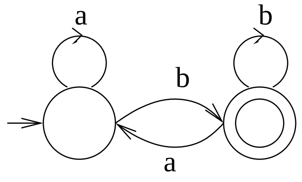

Fig. 14 – Un automate de Büchi déterministe acceptant $(a^* b)^\omega$

Il existe cependant un cas où l'on sait bien complémenter les langages de mots infinis. Il a été vu dans la section 5 : si $\mathcal{A}_\phi$ est un automate (alternant) acceptant les modèles d'une formule LTL ϕ, $\mathcal{A}_{\neg\phi}$ accepte le complémentaire. La raison pour laquelle ce passage au complémentaire est simple est dû à la *faiblesse* de l'automate.

Definition 22 *Un automate ed Büchi alternant est* faible *s'il existe un ordre sur les états tel que, pour tout état q, tout symbole a de l'alphabet et tout état q' apparaissant dans $\delta(q, a)$, $q' \leq q$.*

Les automates correspondant aux formules LTL sont faibles en ce sens : il suffit de choisir l'ordre sous-formule.

Exercice 13
Montrer que, pour un automate de Büchi déterministe et faible, il suffit d'échanger les états finaux et non-finaux pour obtenir un automate qui accepte le complémentaire.

Les automates de Büchi alternants faibles ne sont cependant pas assez expressifs pour que n'importe quel langage Büchi-reconnaissable soit reconnu par un tel automate :

Exercice 14
Donner un langage Büchi reconnaissable qui n'est reconnu par aucun automate alternant faible.

Il nous faut donc changer la condition pour accepter (c'est pourquoi on introduit une condition de parité) puis montrer que tout langage accepté par un automate de Büchi est accepté par un automate alternant à parité faible, puis montrer la complémentation des automates à parité faible et enfin retourner aux automates de Büchi. C'est ce que nous faisons dans les paragraphes qui suivent.

6.2 Automates alternants faibles à condition de parité

On suppose qu'à chaque état q est associé un entier $r(q)$ appelé *rang*. Un automate avec condition de parité est un automate fini comme précédemment, mais la condition pour accepter est remplacée par :

> Il existe un calcul ρ de $\mathcal{A}$ sur w tel que le minimum des rangs des états de ρ apparaissant infiniment souvent est pair.

Un automate alternant à condition de parité accepte un mot w ssi il existe un calcul ρ de l'automate sur w tel que tout chemin infini satisfait la condition de parité.

Un automate (alternant ou non) avec condition de parité est *faible*, si pour toute transition $\delta(q, a) = \phi$ et tout état $q' \in \phi$, $r(q') \leq r(q)$.

Exercice 15
Les indices dans la notation des états indiquent leur rang. L'état initial est q_3^1.

$$\begin{array}{lcl}
q_3^1 & \xrightarrow{a} & (q_2^1 \vee q_3^1) \wedge q_1^1 \\
q_3^1 & \xrightarrow{b} & (q_2^2 \vee q_3^1) \wedge q_0^1 \\
q_2^1 & \xrightarrow{b} & \textbf{true} \\
q_2^2 & \xrightarrow{a} & \textbf{true} \\
q_1^1 & \xrightarrow{b} & q_1^1 \\
q_1^1 & \xrightarrow{a} & q_1^1 \vee q_0^1 \\
q_0^1 & \xrightarrow{a} & q_0^1
\end{array}$$

les transitions non indiquées vont vers **false**.

L'automate est-il faible ?