Calculabilité 2004
Partiel du 22 novembre

19 novembre 2004

Les exercices sont indépendants. Les documents sont autorisés. Seuls les résultats vus en cours ou en TD peuvent être utilisés. Durée : 3h.

1

Donner en détail une machine de Turing qui accepte le langage $L \subseteq \{a, b\}^*$ des mots contenant autant de a que de b. Justifier que la machine s'arrête sur toute donnée (10 lignes). Justifier que la machine accepte bien le langage souhaité (10 lignes).
Longueur estimée : 1 page et demie ; 5 points

2

Étant donnés une machine de Turing M et un entier n (en base 2), dire, en le justifiant, si les questions suivantes sont décidables

1. M s'arrête sur la donnée vide après au plus n mouvements
2. Lors du calcul de M sur la donnée vide, M passe par une configuration dans laquelle le contenu du ruban est exactement $\$n$.
3. M calcule la fonction constante n.

Longueur estimée : 1 page ; 6 points

3

1. On dit qu'une machine de Turing M *boucle* sur la donnée w si M passe deux fois dans la même configuration : $q, \epsilon, \$w \vdash_M^* q_1, w_1, w_2 \vdash_M^+ q_1, w_1, w_2$. Montrer que le problème de savoir si, étant donné M, M boucle sur la donnée vide, est indécidable.
2. Un *automate linéairement borné* est une machine de Turing dont l'espace de travail est limité à droite par l'extrémité du mot d'entrée. Autrement dit, pour tout état q, la transition $\delta(q, B)$, si elle existe, est de la forme $(B, q', \leftarrow)$. Montrer que le problème suivant (arrêt universel des automates linéairement bornés) est indécidable :

   Donnée : Un automate linéairement borné A

   Question : est ce que, pour tout mot w, A s'arrête sur la donnée w ?

Longueur estimée : moins d'1 page ; 5 points

4

On admet l'existence d'une application surjective t des entiers dans les fonctions récursives primitives à un argument (une numérotation des fonctions récursives primitives à un argument). On admet également l'existence d'une fonction récursive totale universelle Eval à deux arguments telle que $\mathsf{Eval}(x, y) = t(x)(y)$.

Montrer que Eval n'est pas récursive primitive.

Longueur estimée : 3 lignes ; 3 points

5

Montrer que le problème suivant est indécidable.

Donnée : un ensemble fini de polyominos

Question : Peut on recouvrir un quart de plan par ces polyominos (sans chevauchement) ?

Note : on ne peut pas effectuer de rotation des pièces de ce puzzle.

On pourra réduire le problème de pavage. Pour répondre à la question, on ne demande que de dessiner les polyominos qui codent le problème