Automates d'arbres

http://list.mpri.master.univ-paris7.fr/wws/info/cours-1-18

cours-1-18@mpri.master.univ-paris7.fr

Cours: Florent Jacquemard
TD: Ștefan Ciobâcă

INRIA Saclay & LSV (CNRS-ENS Cachan)

florent.jacquemard@inria.fr
ciobaca@lsv.ens-cachan.fr

27 janvier 2010

Automates d'arbres alternants

Alternating Tree Automata

Bibliography

- **TATA book** (Tree Automata Theory and Application) `http://tata.gforge.inria.fr` chapter 7.
- Chandra Kozen Stockmeyer. Alternation, Journal of the ACM vol. 28, 1981

Automates d'arbres descendants (rappel)

Definition : Automates d'arbres descendants

Un automate d'arbres descendant sur une signature Σ est un tuple $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, Q^{\mathsf{init}}, \Delta)$ où Q est un ensemble fini d'*états*, $Q^{\mathsf{init}} \subseteq Q$ est le sous-ensemble des états initiaux et Δ est un ensemble de règles de transition de la forme : $q \to f(q_1, \ldots, q_n)$ avec $f \in \Sigma_n$ $(n \geq 0)$ et $q_1, \ldots, q_n, q \in Q$.

- $t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ est accepté par $\mathcal{A}$ dans l'état q ssi $q \xrightarrow[\Delta]{*} t$.
- $L(\mathcal{A}, q) := \left\{ t \in \mathcal{T}(\Sigma) \;\middle|\; q \xrightarrow[\Delta]{*} t \right\}$.
- Le langage de $\mathcal{A}$ est $L(\mathcal{A}) := \displaystyle\bigcup_{q^{\mathsf{i}} \in Q^{\mathsf{init}}} L(\mathcal{A}, q^{\mathsf{i}})$.

Automates d'arbres descendants : exemple

Termes de $\mathcal{T}\big(\{f{:}2, g{:}2, a{:}0\}\big)$ contenant exactement un g :
$Q = \{q_0, q_1\}$, $Q^{\mathsf{init}} = \{q_1\}$,

$$\begin{array}{lcllcl}
q_1 & \to & f(q_0, q_1) & q_1 & \to & f(q_1, q_0) \\
q_1 & \to & g(q_0, q_0) & & & \\
q_0 & \to & f(q_0, q_0) & q_0 & \to & a
\end{array}$$

Termes de $\mathcal{T}\big(\{f{:}2, g{:}2, a{:}0\}\big)$ contenant au moins un g :
$Q = \{q_0, q_1\}$, $Q^{\mathsf{init}} = \{q_1\}$,

$$\begin{array}{lcllcl}
q_1 & \to & f(q_0, q_1) & q_1 & \to & f(q_1, q_0) \\
q_1 & \to & g(q_0, q_0) & q_0 & \to & g(q_0, q_0) \\
q_0 & \to & f(q_0, q_0) & q_0 & \to & a
\end{array}$$

Automates d'arbres descendants (rappels, suite)

expressivité :

- descendants n.d. $=$ ascendants n.d.
  $=$ ascendants déterministes
- descendants déterministes $\subsetneq$ descendants n.d.

Non déterminisme et alternance

Non déterminisme :

$$\begin{array}{rcl} q & \rightarrow & f(q_{1,1}, \ldots, q_{1,n}), \\ & \vdots & \\ q & \rightarrow & f(q_{k,1}, \ldots, q_{k,n}) \end{array}$$

peut s'exprimer en une seule transition :

$$q, f \rightarrow (q_{1,1}, \ldots, q_{1,n}) \vee \ldots \vee (q_{k,1}, \ldots, q_{k,n})$$

ou encore

$$q, f \rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{j=1}^{n} \langle q_{i,j}, j \rangle$$

Automates d'arbres alternants

Definition : Automates d'arbres alternants

Un automate d'arbres alternant sur une signature Σ est un tuple $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, Q^{\mathsf{init}}, \delta)$ où Q est un ensemble fini d'*états*, $Q^{\mathsf{init}} \subseteq Q$ est le sous-ensemble des états initiaux et δ est une fonction de $Q \times \Sigma$ vers $\mathcal{B}^+(Q \times \mathbb{N})$ telle que $\delta(q, f) \in \mathcal{B}^+\big(Q \times \{1..arity(f)\}\big)$.

Automate d'arbres alternant : exemple

Termes de $\mathcal{T}\big(\{f{:}2, g{:}2, a{:}0\}\big)$ contenant exactement un g :

$$
\begin{array}{lcllcl}
q_1 & \rightarrow & f(q_0, q_1) & q_1 & \rightarrow & f(q_1, q_0) \\
q_1 & \rightarrow & g(q_0, q_0) & & & \\
q_0 & \rightarrow & f(q_0, q_0) & q_0 & \rightarrow & a
\end{array}
$$

$$\equiv$$

$$
\begin{array}{lcl}
q_1, f & \rightarrow & \big(\langle q_0, 1\rangle \wedge \langle q_1, 2\rangle\big) \vee \big(\langle q_1, 1\rangle \wedge \langle q_0, 2\rangle\big) \\
q_0, f & \rightarrow & \langle q_0, 1\rangle \wedge \langle q_0, 2\rangle \\
q_1, g & \rightarrow & \langle q_0, 1\rangle \wedge \langle q_0, 2\rangle \\
q_0, g & \rightarrow & \mathit{false} \\
q_0, a & \rightarrow & \mathit{true} \\
q_1, a & \rightarrow & \mathit{false}
\end{array}
$$

Automates d'arbres alternants : calculs

Un *calcul* d'un automate d'arbres alternant $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, Q^{\mathsf{init}}, \delta)$ sur un terme $t \in \mathcal{T}(\Sigma)$ est un arbre r étiqueté par $Q \times \mathbb{N}^*$ t.q. :

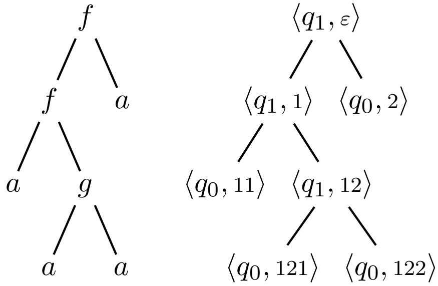
- $r(\varepsilon) = \langle q, \varepsilon \rangle$ pour $q \in Q$,
- si $r(\pi) = \langle q, p \rangle$ et $t(p) = f$, alors il existe $S = \{\langle q_1, i_1 \rangle, \ldots, \langle q_k, i_k \rangle\} \subseteq Q \times \{1..arite(f)\}$ tel que $S \models \delta(q, f)$, et $r(\pi \cdot j) = \langle q_j, p \cdot i_j \rangle$ pour tout $j \in \{1..k\}$.

$L(\mathcal{A}, q) = \{t \mid \exists\, \text{calcul}\, r\, \text{de}\, \mathcal{A}\, \text{sur}\, t\, \text{avec}\, r(\varepsilon) = \langle q, \varepsilon \rangle\}$.

$$L(\mathcal{A}) := \bigcup_{q \in Q^{\mathsf{init}}} L(\mathcal{A}, q) \qquad (\exists \text{ calcul "}\textit{acceptant}\text{"}).$$

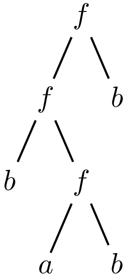
Calculs d'automates d'arbres alternants : exemple 1

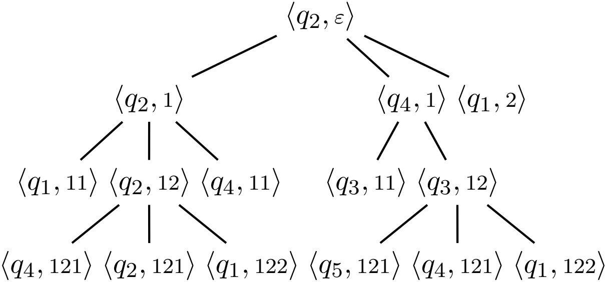
$$
\begin{array}{|rcl|}
\hline
q_1, f & \rightarrow & \big(\langle q_0, 1\rangle \wedge \langle q_1, 2\rangle\big) \vee \big(\langle q_1, 1\rangle \wedge \langle q_0, 2\rangle\big) \\
q_0, f & \rightarrow & \langle q_0, 1\rangle \wedge \langle q_0, 2\rangle \\
q_1, g & \rightarrow & \langle q_0, 1\rangle \wedge \langle q_0, 2\rangle \\
q_0, g & \rightarrow & \mathit{false} \\
q_0, a & \rightarrow & \mathit{true} \\
q_1, a & \rightarrow & \mathit{false} \\
\hline
\end{array}
$$



Calculs d'automates d'arbres alternants : exemple 2

$q_2,f \rightarrow \Big[(\langle q_1,1\rangle\wedge\langle q_2,2\rangle)\vee(\langle q_1,2\rangle\wedge\langle q_2,1\rangle)\Big]\wedge\langle q_4,1\rangle$	$q_2,a\rightarrow true$	$q_2,b\rightarrow false$
$q_1,f \rightarrow (\langle q_2,1\rangle\wedge\langle q_2,2\rangle)\vee(\langle q_1,2\rangle\wedge\langle q_1,1\rangle)$	$q_1,a\rightarrow false$	$q_1,b\rightarrow true$
$q_4,f \rightarrow (\langle q_3,1\rangle\wedge\langle q_3,2\rangle)\vee(\langle q_4,1\rangle\wedge\langle q_4,2\rangle)$	$q_4,a\rightarrow true$	$q_4,b\rightarrow true$
$q_3,f \rightarrow \Big[(\langle q_3,1\rangle\wedge\langle q_2,2\rangle)\vee(\langle q_4,1\rangle\wedge\langle q_1,2\rangle)\Big]\wedge\langle q_5,1\rangle$	$q_3,a\rightarrow false$	$q_3,b\rightarrow true$
$q_5,f \rightarrow false$	$q_5,a\rightarrow true$	$q_5,b\rightarrow false$





Clôtures Booléennes

Proposition :

Etant donnés des automates d'arbres alternants $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur Σ, on peut construire en temps linéaire des automates d'arbres alternants reconnaissant $L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$, $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$, et $\overline{L(\mathcal{A}_1)}$.

Expressivité

Proposition :

Etant donné un automate d'arbres alternant $\mathcal{A}$ sur Σ, on peut construire en temps exponentiel un automate d'arbres ascendant déterministe $\mathcal{A}'$ reconnaissant le même langage.

L'explosion exponentielle est inévitable.

Décision

Proposition :

Les problème de l'appartenance est décidable en temps polynomial pour les automates d'arbres alternants.

Proposition :

Les problèmes du vide et de l'universalité sont EXPTIME-complets pour les automates d'arbres alternants.