Logique

TD n°5
Quelques éléments de corrections

David Baelde

5 mars 2021

Exercise 1 : Pavages

La question 1 était déja bien connue.

Pour la deuxième question, étant donné une instance du problème de pavage on considère l'ensembles de formules suivantes, où les k, k' sont des indices de tuiles quelconques et $i, j \in [1; n]$ dénotent une position dans un carré fini ou infini (quand $n = +\infty$). On utilise, pour tout i, j, k la variable propositionnelle $P_{i,j,k}$ pour indiquer que la tuile k est en position i, j.

$$\bigvee_k P_{i,j,k} \qquad \bigvee_{k \neq k'} \neg P_{i,j,k} \ \vee \neg P_{i,j,k'}$$

$$\bigvee_{T_k H T'_k} P_{i,j,k} \ \wedge P_{i+1,j,k'} \qquad \bigvee_{T_k V T'_k} P_{i,j,k} \ \wedge P_{i,j+1,k'}$$

(Dans les dernières formules on se restreint aux i, j tel que $i+1, j+1$ est encore dans $[1; n]^2$.)

On montre alors que l'instance est positive ssi l'ensemble de formules pour $n = +\infty$ est satisfaisable :

- S'il y a un pavage du quart de plan, on a un modèle. C'est même vrai pour $n < +\infty$: s'il existe un pavage de $[1; n]^2$ alors l'ensemble de formules pour n a un modèle.
- Dans l'autre sens, s'il y a un modèle, cela induit pour tout $i, j \in \mathbb{N}^2$ une unique tuile tel que $P_{i,j,k}$ est satisfait, et ce pavage respecte les compatibilités.

Par compacité, s'il n'existe pas de pavage du quart de plan, alors l'ensemble d'axiomes pour $n = +\infty$ n'est pas satisfaisable, donc admet un sous-ensemble non-satisfaisable. Ce sous-ensemble est inclus dans l'ensemble d'axiome pour un n' fini, qui n'est donc pas non plus pavable.

Pour montrer l'indécidabilité du fragment logique considéré, on considère l'encodage d'une instance du problème de pavage comme un nombre fini de formules :

$$\forall x, y. \ \ (\bigvee_k P_k(x, y) \wedge \bigwedge_{k' \neq k} P_{k'}(x, y))$$

$$\forall x, x', y.\ S(x, x') \Rightarrow \bigvee_{T_k H T_{k'}} P_k(x, y) \wedge P_{k'}(x', y)$$

$$\forall x, y, y'.\ S(y, y') \Rightarrow \bigvee_{T_k V T_{k'}} P_k(x, y) \wedge P_{k'}(x, y')$$

On y ajoute de plus les formules suivantes :

$$\forall x. \exists y. S(x, y) \qquad \exists x.\ \forall y. \neg S(y, x)$$

On vérifie que l'instance est positive ssi l'ensemble des formules ci-dessus est satisfaisable.

— Si l'instance est positive on construit un modèle, de domaine $\mathbb{N}$ et où $\hat{S}$ est la relation successeur.
— Si on a un modèle, on prend un élément a_0 de son domaine qui témoigne du dernier axiome, i.e. tel que pour tout b on n'a pas $\hat{S}(b, a) = 1$. Grâce à nos deux axiomes sur le successeur on peut définir pour tout i un a_i tel que $\hat{S}(a_i, a_{i+1}) = 1$, de façon à ce que les a_i soient tous distincts. On extrait ensuite pour chaque $i, j \in \mathbb{N}^2$ l'unique tuile T_k tel que $\hat{P}_k(a_i, a_j) = 1$. On vérifie que c'est un pavage
— Une version alternative de la direction précédent : s'il n'y a pas de pavage du quart de plan, il n'y a pas de pavage d'un certain carré fini $[1; n]^2$. On construit alors une preuve de $\perp$ à partir des axiomes : il faut faire apparaitre le x_0 qui n'est successeur de personne, puis ses n successeurs x_i, enfin faire une disjonction de cas sur tous les pavages possibles des (x_i, x_j) et constater pour chaque pavage possible qu'une compatibilitée est violée. On aura utilisé tous les axiomes, comme dans l'argument précédent.

Exercise 2 : Monadic predicate calculus

Étant donné un modèle M on considère la relation d'équivalence $\sim$ sur son domaine, donnée par

$$a \sim b \text{ ssi } \hat{P}_i(a) = \hat{P}_i(b) \text{ pour tout } i.$$

Cette relation induit au plus 2^n classes. On considère le modèle M' dont le domaine est constitué de ces classes, avec $\hat{P}'_i([a]) = \hat{P}_i(a)$ pour un choix arbitraire de a dans la classe.

On pose $f(a) = [a]$ la classe d'équivalence de a pour $\sim$. On vérifie alors que, pour toute formule ϕ de variables libres $x_1, \ldots, x_m$ et pour tous $a_1, \ldots, a_m$ dans le domaine de M :

$$\mathcal{M}, \{x_1 \to a_1, \ldots, x_m \to a_m\} \models \phi \text{ ssi } \mathcal{M}', \{x_1 \to f(a_1), \ldots, x_m \to f(a_m)\} \models \phi$$

On procède par induction sur la structure de ϕ, les seuls cas intéressants sont les atomes et les quantificateurs :

— La propriété est vraie pour les atomes, i.e. pour $\phi = P_i(x_j)$ par définition de $\mathcal{M}'$.
— Supposons $\phi = \forall x. \psi$. Si on a la satisfaction de gauche, montrons celle de droite. Par définition de la satisfaction pour une quantification universelle, et comme tout élément du domaine de M' s'écrivant comme un $f(a)$, il suffit de montrer que, pour tout a,

$$\mathcal{M}', \{x_1 \to f(a_1), \ldots, x_m \to f(a_m), x \to a\} \models \psi$$

ce qui est une conséquence immédiate de l'hypothèse d'induction sur ψ, et par définition de la satisfaction pour $\forall x.\psi$.

Réciproquement, si l'on a la satisfaction de droite montrons celle de gauche. Il faut montrer, pour tout a,

$$\mathcal{M}, \{x_1 \to a_1, \ldots, x_m \to a_m, x \to a\} \models \psi$$

ce qui est immédiat par hypothèse d'induction sur ψ et comme l'on a

$$\mathcal{M}', \{x_1 \to f(a_1), \ldots, x_m \to f(a_m)\} \models \phi$$

.

— Le cas $\phi = \exists x.\psi$ est symétrique.

Ajout de symboles de fonction. Considérons maintenant l'ajout de symboles de fonction unaires. Si l'on ajoute des symboles de fonction, on ne peut plus identifier deux éléments du domaine quand les (interprétations des) prédicats prennent les mêmes valeurs sur ces éléments. Au lieu de regarder seulement les $\hat{P}_i(a)$ il va falloir aussi considérer les $\hat{P}_i(\hat{f}(a))$, $\hat{P}_i(\hat{f}(\hat{g}(a)))$... Heureusement, on peut s'arrêter pour ne considérer qu'un nombre fini de cas : il suffit de considérer les successions d'applications de fonctions présentes dans la formule considérée.

Soit une formule ϕ dans ce language, et $\mathcal{M}$ un modèle de ϕ, de domaine D. Notons F une séquence finie de symboles de fonctions. Si $F = f_1 \ldots f_m$ une telle séquence de longueur $m \geq 0$. On note $F(x)$ pour $f_1(\ldots f_m(x))$ et $\hat{F}(a)$ pour $\hat{f}_1(\ldots \hat{f}_m(a))$. On pose enfin $a \sim_k b$ quand, pour tout F de longueur au plus k, et pour tout i, $\hat{P}_i(\hat{F}(a)) = \hat{P}_i(\hat{F}(b))$.

Soit n la longueur de la plus longue séquence d'applications de fonctions apparaissant dans ϕ. On construit le modèle $\mathcal{M}'$ comme suit :

— Le domaine D' de $\mathcal{M}'$ est composé d'un unique élément de chaque classe d'équivalence de D pour $\sim_n$.

— L'interprétation $\tilde{P}_i$ d'un prédicat P_i dans $\mathcal{M}'$ est la restriction de $\hat{P}_i$ à D' : pour tout $a \in D'$, $\tilde{P}_i(a) = \hat{P}_i(a)$.

— Pour un symbole de fonction f' et $a \in D'$, on définit $\tilde{f}(a)$ comme l'unique $b \in D'$ tel que $b \sim_n \hat{f}(a)$.

On montre par induction sur $k \leq n$ que, pour toute séquence de fonctions F de longueur k et pour tous $a \in D$, $a' \in D'$ tel que $a \sim_k a'$, on a :

$$\mathcal{M}, \{x \mapsto a\} \models P_i(F(a)) \text{ ssi } \mathcal{M}', \{x \mapsto a'\} \models P_i(F(a))$$

— C'est immédiat pour $k = 0$ car $a \sim_0 a'$ entraîne $\hat{P}_i(a) = \tilde{P}_i(a')$ puis le résultat par définition de $\tilde{P}_i$.

— Supposons $F = F'.g$. Comme $a \sim_k a'$, on a $\hat{g}(a) \sim_{k-1} \hat{g}(a')$. D'autre part, $\hat{g}(a') \sim_n \tilde{g}(a')$ par définition et, puisque $k \leq n$, $\hat{g}(a') \sim_{k-1} \tilde{g}(a')$. On conclut $\hat{g}(a) \sim_{k-1} \tilde{g}(a')$ d'où le résultat par hypothèse d'induction sur F'.

On montre enfin par induction sur les formules ϕ ne comportant pas d'application de fonctions de longueur supérieure à n que :

$$\mathcal{M}, \sigma \models \phi \text{ ssi } \mathcal{M}', \sigma' \models \phi$$

où $\sigma'(x)$ est l'unique $a \in D'$ tel que $a \sim_n \sigma(x)$. Le seul cas véritablement nouveau est celui d'une formule atomique, nécessairement de la forme $P_i(F(x))$, qu'on a traité ci-dessus.