Logique 2021
Devoir à la Maison #2

David Baelde

Ceci est la troisième version : voir les annotations V3 en marge pour les modifications.
Le devoir est à rendre pour le 10 mai 2021 avant le cours, sous la forme d'un PDF composé en LaTeXet à déposer sur la page ecampus du cours. Pour rappel, les devoirs maison sont notés et remplaceront au moins en partie les épreuves sur table cette année. Vous pouvez travailler le DM en groupe, mais j'attends des rendus rédigés individuellement.

Le futur est-il écrit à l'avance, ou chaque instant a-t-il plusieurs futurs possibles ? Autrement dit, le temps est-il une ligne droite ou une structure arborescente ? Cette question métaphysique se décline en informatique où les réponses sont plus simples : les deux types de modèles du temps sont utiles, selon le type de systèmes et de propriétés auxquels on s'intéresse. Dans ce devoir, nous étudions deux logiques temporelles simples, une sur chaque type de modèle.

Nous travaillerons dans ce DM sur des structures de Kripke, selon une définition plus générale que celle du cours de logique constructive :

- une structure de Kripke est ici donnée par un ensemble de mondes muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ arbitraire ; ▷V2
- pour chaque monde on a une interprétation des constantes propositionnelles (pour chaque w et P on a $\hat{P}_w \in \{0, 1\}$).

Dans le cours, $\mathcal{R}$ était une relation réflexive et transitive notée $\leq$, et l'interprétation était monotone : ce n'est plus le cas ici.

1 Temps linéaire

On considère des formules construites sur la grammaire suivante :

$$A, A' ::= \top \mid \bot \mid P \mid \neg P \mid A \vee A' \mid A \wedge A' \mid \bigcirc A$$

Il s'agit des formules de la logique propositionnelle, enrichies de l'opérateur $\bigcirc$, en forme normale négative. Ici, P désigne un atome, i.e. une constante propositionnelle. La négation ne porte que sur les atomes, ce qui n'est pas une restriction du fait des lois de de Morgan : on verra que celles-ci s'étendent à notre modalité par $\neg \bigcirc A = \bigcirc \neg A$.

La sémantique de ces formules est donnée en restreignant notre attention aux structures de Kripke linéaires, i.e. celles où pour tout monde w il existe un unique w' tel que $w \mathrel{\mathcal{R}} w'$. Cet unique successeur sera noté $w+1$. Étant donné une structure $\mathcal{S}$ et un monde w de $\mathcal{S}$, on définit par induction sur A l'interprétation de $[\![A]\!]^w_{\mathcal{S}}$:

$$\begin{array}{rcll}
[\![\top]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 & \\
[\![\bot]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 0 & \\
[\![P]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & \hat{P}_w & \\
[\![\neg P]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 - \hat{P}_w & \\
[\![A \wedge A']\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 \quad \text{ssi} & [\![A]\!]^w_{\mathcal{S}} = 1 \text{ et } [\![A']\!]^w_{\mathcal{S}} = 1 \\
[\![A \vee A']\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 \quad \text{ssi} & [\![A]\!]^w_{\mathcal{S}} = 1 \text{ ou } [\![A']\!]^w_{\mathcal{S}} = 1 \\
[\![\bigcirc A]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & [\![A]\!]^{w+1}_{\mathcal{S}} &
\end{array}$$

Quand il n'y a pas ambiguité, on pourra omettre $\mathcal{S}$ dans $[\![A]\!]^w_{\mathcal{S}}$.

On dira qu'une formule A est valide quand on a $[\![A]\!]^w_{\mathcal{S}} = 1$ pour toute structure $\mathcal{S}$ et pour tout monde w de $\mathcal{S}$. Quand $[\![A]\!]^w_{\mathcal{S}} = 1$ on dira que $\mathcal{S}, w$ est un modèle de A, ce que l'on notera $\mathcal{S}, w \models A$. Dans le cas contraire on dit que $\mathcal{S}, w$ est un contre-modèle de A.

Question 1

Parmi les formules A_x suivantes, lesquelles sont valides ? Justifier.

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} P \vee \neg P \qquad A_2 \stackrel{\text{def}}{=} P \vee (\bigcirc \neg P) \qquad A_3 \stackrel{\text{def}}{=} (\bigcirc P) \vee (\bigcirc \neg P)$$

Question 2

Montrer que toute formule est logiquement équivalente [1] à une formule qui ne contient aucune sous-formule de la forme $\bigcirc\top$, $\bigcirc\bot$, $\bigcirc(A \wedge A')$ ou $\bigcirc(A \vee A')$. ▷V2

On considère des séquents *monolatères* [2] $\vdash \Gamma$ où Γ est un ensemble de formules. Leur sémantique est donnée en interprétant les ensembles comme des disjonctions : le séquent $\vdash \Gamma$ est valide si $\bigvee_{A \in \Gamma} A$ l'est. On considère les règles de la Figure 1, qui portent sur de tels séquents, comme système de preuve pour notre

1. Deux formules sont logiquement équivalentes quand elles ont les mêmes modèles.
2. Intuitivement, on peut se ramener à ces séquents en passant de $\Gamma \vdash \Delta$ à $\vdash \neg\Gamma, \Delta$ et en mettant toutes les formules en forme normale négative.

$$\dfrac{}{\vdash \Gamma, \top} \qquad \dfrac{}{\vdash \Gamma, P, \neg P} \qquad \dfrac{\vdash \Gamma, A, A'}{\vdash \Gamma, A \vee A'} \qquad \dfrac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, A'}{\vdash \Gamma, A \wedge A'} \qquad \dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \bigcirc\Gamma, \Delta}$$

FIGURE 1 – Calcul des séquents pour la logique du temps linéaire.

logique. Dans la dernière règle, $\bigcirc\Gamma$ dénote l'ensemble des formules $\bigcirc A$ tel que $A \in \Gamma$. Ces règles permettent par exemple de construire les dérivations suivantes :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \top}}{\vdash P, \bigcirc\top}}{\vdash P \vee \bigcirc\top} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash P, \neg P, \neg Q}}{\vdash P, \neg P \vee \neg Q}}{\vdash \bigcirc P, \bigcirc(\neg P \vee \neg Q)} \quad \dfrac{\vdots}{\vdash \bigcirc Q, \bigcirc(\neg P \vee \neg Q)}}{\vdash (\bigcirc P) \wedge (\bigcirc Q), \bigcirc(\neg P \vee \neg Q)}}{\vdash \big((\bigcirc P) \wedge (\bigcirc Q)\big) \vee \big(\bigcirc(\neg P \vee \neg Q)\big)}$$

Question 3

Montrer que toutes les règles de la Figure 1 sont correctes : si les prémisses d'une instance de la règle sont valides, la conclusion l'est aussi. On veillera à bien s'appuyer sur la notion de validité formellement définie plus haut.

Question 4

Montrer que les quatre premières règles sont inversibles : si la conclusion est valide alors les prémisses aussi.

Question 5

Considérons une instance de la dernière règle telle que Δ ne contient que des atomes, négations d'atomes ou $\bot$, et ne contient pas à la fois un atome et sa ▷V3
négation. Montrer que si la conclusion est valide alors la prémisse l'est aussi.

Question 6

En déduire que le calcul est complet : tout séquent valide est dérivable.

2 Temps arborescent

On considère maintenant un nouveau langage pour les formules, en remplaçant la modalité $\bigcirc$ par les modalités $\Box$ et $\Diamond$:

$$A, A' ::= \top \mid \bot \mid P \mid \neg P \mid A \vee A' \mid A \wedge A' \mid \Box A \mid \Diamond A$$

La sémantique de cette logique est définie sur des structures de Kripke quelconques — on pourrait se restreindre aux arbres, mais cela ne changerait rien [3]. On oublie donc la contrainte de linéarité : un monde peut avoir plusieurs successeurs ; il peut aussi n'en avoir aucun. La définition formelle de la sémantique ne change que pour les modalités :

$$\begin{array}{rcll} [\![\Box A]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 & \text{ssi} \quad [\![A]\!]^{w'}_{\mathcal{S}} = 1 \text{ pour tout } w' \text{ tel que } w \; \mathcal{R} \; w' \\ [\![\Diamond A]\!]^w_{\mathcal{S}} & = & 1 & \text{ssi} \quad [\![A]\!]^{w'}_{\mathcal{S}} = 1 \text{ pour un } w' \text{ tel que } w \; \mathcal{R} \; w' \end{array}$$

Question 7
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? Justifier.

$$A_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\Diamond\neg P) \vee (\Diamond P) \qquad A_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\Box\neg P) \vee (\Box P) \qquad A_3 \stackrel{\text{def}}{=} (\Box\bot) \vee (\Diamond\top)$$

On considère pour la logique du temps arborescent un calcul des séquents défini par les mêmes quatre premières règles que dans la section précédente, mais en remplaçant la règle modale précédente par la suivante :

$$\frac{\vdash A, \Gamma}{\vdash \Box A, \Diamond\Gamma, \Delta}$$

Dans cette règles, les ensembles de formules Γ et Δ peuvent être vides — mais il n'est pas question pour la formule A d'être vide. On peut ainsi dériver, par exemple : ▷V2

$$\frac{\overline{\vdash P, \neg P, R}}{\vdash \Box P, \Box Q, \Diamond\neg P, \Diamond R, S} \qquad \frac{\overline{\vdash \top}}{\vdash \Box\top}$$

Question 8
Montrer que cette nouvelle règle modale est correcte.

3. Ceci est un corollaire du résultat de complétude que vous allez démontrer.

On en conclut que les séquents dérivables sont valides. On cherche maintenant à montrer la complétude du calcul. On admettra que les quatre premières règles de la Figure 1 sont inversibles pour la sémantique arborescente.

Question 9
On considère un séquent $\vdash \Box A_1, \ldots, \Box A_n, \Diamond\Gamma, \Delta$ pour $n \geq 0$, où Δ ne contient que des atomes, négations d'atomes et éventuellement $\bot$, et ne contient pas à la fois un atome et sa négation. Montrer que si tous les séquents $\vdash A_i, \Gamma$ sont invalides, alors le séquent précédent est aussi invalide. ▷V3

Question 10
En conclure que ce calcul des séquents est complet pour la logique du temps arborescent.

Question 11
Proposer une nouvelle règle, ou une modification de la règle modale, pour obtenir un calcul correct et complet quand l'on modifie la sémantique en ne considérant que des structures sans extrémité (tout monde a au moins un successeur).

Question 12
Même question quand on se restreint aux structures transitives, i.e. les structures où, pour tous w_1, w_2, w_3 tel que $w_1 \mathcal{R} w_2 \mathcal{R} w_3$ on a aussi $w_1 \mathcal{R} w_3$.