Calcul des Séquents LK_1

David Baelde

ENS Paris-Saclay, L3, 2018–2019

Dans ce chapitre nous étendons le calcul des séquents LK_0 vu précédemment pour le calcul propositionnel classique, afin d'obtenir un calcul adapté au calcul des prédicats. Nous démontrerons que le calcul obtenu, nommé LK_1, est correct et complet pour le calcul des prédicats.

1 Calcul des séquents LK_1 bilatère

Le calcul des séquents LK_1 pour la logique du premier ordre est très proche du calcul LK_0 vu pour la logique propositionnelle. Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est une paire formée de deux multi-ensembles de formules (du premier ordre) Γ et Δ. La lecture logique d'un tel séquent est donnée par la formule suivante :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n.\ (\bigwedge_{\phi \in \Gamma} \phi) \Rightarrow (\bigvee_{\psi \in \Delta} \psi) \qquad \text{où} \qquad \{x_1, \dots, x_n\} = \mathsf{fv}(\Gamma, \Delta).$$

On dira qu'un séquent est valide quand sa formule associée est valide.

Les règles du calcul sont données en Figure 1. On y retrouve les règles de LK_0, auxquelles on a simplement ajouté les règles pour les nouveaux connecteurs logiques, c'est-à-dire les quantificateurs.

L'écriture (Γ, ϕ) dénote l'addition d'un élément ϕ au multi-ensemble de formules Γ. Il peut être utile de rappeler la lecture précise des règles, reposant sur cette notation. Prenons l'exemple de la règle $\wedge_L$. Celle-ci s'applique dès lors que le séquent conclusion a pour partie gauche un séquent qui contient (au moins) une occurrence d'une formule de la forme $\phi \wedge \psi$. Un tel séquent s'écrit $\Gamma, \phi \wedge \psi$. L'application de la règle $\wedge_L$ permet de dériver ce séquent si l'on a une dérivation du séquent $\Gamma, \phi, \psi \vdash \Delta$, c'est à dire le séquent obtenu en remplaçant une occurrence de $\phi \wedge \psi$ à gauche du séquent par de nouvelles occurrences des formules ϕ et ψ. Noter qu'il n'est pas exclu que Γ contienne déja ϕ et ψ, auquel cas le nombre d'occurrences de ces formules est simplement augmenté de 1.

Par rapport au calcul de séquents vu dans le cadre propositionnel classique, on notera qu'on a ajouté la règle de contraction. On verra en effet que celle-ci est indispensable dans le cadre du calcul des prédicats. On a aussi contraint la règle axiome pour que celle-ci ne porte que sur des atomes A ; on verra que c'est suffisant pour obtenir la complétude du calcul.

Dans ce chapitre, nous adopterons une vision “recherche de preuve” du calcul LK_1. C’est à dire qu’on pense à la construction d’une preuve à partir de sa conclusion, l’application d’une règle permettant de ramener la recherche d’une preuve de la conclusion de la règle à la recherche de preuves pour les prémisses de la règle. On dira que la première règle d’une preuve est la règle appliquée à sa racine.

Théorème 1.1 (Correction de LK_1)**.** *Tout séquent $\Gamma \vdash \Delta$ prouvable en LK_1 est valide.*

Démonstration. On procède, de façon usuelle, par induction sur la preuve Π de $\Gamma \vdash \Delta$. Cela revient à montrer pour chaque règle de LK_1 que si les prémisses sont valides alors la conclusion est valide. On ne détaillera ici que quelques cas intéressants. Il est cependant utile de commencer par expliciter ce que veut dire la validité d’un séquent, c’est à dire la validité de la formule associée vu ci-dessus :

Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est valide si,

- pour toute structure $\mathcal{S}$,
- pour toute affectation σ de domaine $\mathsf{fv}(\Gamma, \Delta)$,
- si $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ pour tout $\phi \in \Gamma$,
- alors $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$ pour une formule $\psi \in \Delta$.

Ceci étant explicité, on voit que le cas de la règle axiome et des règles structurelles est trivial.

Bien que la notion de validité s’est complexifiée par rapport au calcul propositionnel, le cas des règles propositionnelles n’a pas vraiment changé. Considérons par exemple le cas de la règle $\vee_R$: étant donné un séquent valide de la forme $\Gamma \vdash \Delta, \psi_1, \psi_2$, on montre que $\Gamma \vdash \Delta, \psi_1 \vee \psi_2$ est lui aussi valide. Autrement dit, étant donné $\mathcal{S}$ et σ tel que $\mathcal{S}, \sigma \models \phi$ pour tout $\phi \in \Gamma$, on veut montrer $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$ pour une formule ψ de $\Delta, \psi_1 \vee \psi_2$. Par validité du séquent prémisse on a $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$ pour une formule ψ de Δ, ψ_1, ψ_2. Si $\psi \in \Delta$, on conclut immédiatemment. Sinon, $\psi = \psi_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, d’où $\mathcal{S}, \sigma \models \psi_1 \vee \psi_2$ ce qui permet aussi de conclure.

Il ne reste plus qu’à traiter les règles associées aux quantificateurs propositionnels. On n’en détaillera que deux, les autres étant similaires.

Considérons la règle $\forall_L$: étant donné un séquent $\Gamma, \phi[t/x] \vdash \Delta$ valide, montrons que $\Gamma, \forall x.\phi \vdash \Delta$ est lui aussi valide. Soit $\mathcal{S}$ et σ tel que $\mathcal{S}, \sigma \models \phi'$ pour tout $\phi' \in \Gamma$ et $\mathcal{S}, \sigma \models \forall x.\phi$. On veut montrer qu’il existe une formule $\psi \in \Delta$ telle que $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$. Soit σ' un prolongement quelconque de σ tel que $[\![t]\!]_{\sigma', \mathcal{S}}$ est défini (i.e. tel que $\mathsf{fv}(t) \subseteq \mathsf{dom}(\sigma')$). Alors $\mathcal{S}, \sigma' \models \psi$ pour tout $\psi \in \Gamma \cup \{\forall x.\phi\}$ puisque σ' est un prolongement de σ. Donc $\mathcal{S}, \sigma' \uplus \{x \mapsto [\![t]\!]_{\sigma', \mathcal{S}}\} \models \phi$, par définition de $\models$, et enfin $\mathcal{S}, \sigma' \models \phi\{x \mapsto t\}$ d’après le lemme de substitution. Comme le séquent prémisse est valide, on en déduit qu’il existe une formule $\psi \in \Delta$ telle que $\mathcal{S}, \sigma' \models \psi$. Comme σ' et σ coïncident sur les variables libres de ψ, on obtient $\mathcal{S}, \sigma \models \psi$.

Considérons la règle $\forall_R$. Supposons $\Gamma \vdash \Delta, \phi$ valide, avec $x \notin \mathsf{fv}(\Gamma, \Delta)$ et montrons que $\Gamma \vdash \Delta, \forall x.\phi$ est lui aussi valide. Soit $\mathcal{S}$ et σ tel que $\mathcal{S}, \sigma \models \phi'$ pour tout $\phi' \in \Gamma$. Pour tout v dans le domaine de $\mathcal{S}$, si l’on pose $\sigma_v = \sigma \uplus \{x \mapsto v\}$, on a $\mathcal{S}, \sigma_v \models \phi'$ pour tout $\phi' \in \Gamma$ puisque $x \notin \mathsf{fv}(\Gamma)$. Par validité il existe donc $\psi_v \in \Delta, \phi$ tel que $\mathcal{S}, \sigma_v \models \psi_v$. Si pour un v on a $\psi_v \in \Delta$, alors comme $x \notin \mathsf{fv}(\Delta)$ on a aussi $\mathcal{S}, \sigma \models \psi_v$, ce qui permet de conclure. Sinon, on en conclut que $\mathcal{S}, \sigma_v \models \phi$ pour tout v, c’est à dire $\mathcal{S}, \sigma \models \forall x.\phi$, et l’on conclut encore. □

Règle identité

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{axiome}$$

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vdash \Delta}\ \text{contract}_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi, \Delta}\ \text{contract}_R$$

Règles logiques propositionnelles

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_L \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \vdash \Delta}\ \wedge_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi, \Delta}\ \wedge_R$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \vee \psi \vdash \Delta}\ \vee_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi, \Delta}\ \vee_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \phi \Rightarrow \psi \vdash \Delta}\ \Rightarrow_L \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \psi, \Delta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi, \Delta}\ \Rightarrow_R$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma, \neg\phi \vdash \Delta}\ \neg_L \qquad \frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\phi, \Delta}\ \neg_R$$

Règles logiques pour les quantificateurs du premier ordre

$$\frac{\Gamma, \phi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.\ \phi \vdash \Delta}\ \forall_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.\ \phi, \Delta}\ \forall_R\ (*)$$

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.\ \phi \vdash \Delta}\ \exists_L\ (*) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.\ \phi, \Delta}\ \exists_R$$

(*) Dans les règles $\forall_R$ et $\exists_L$, la variable x ne doit apparaître que dans ϕ ; formellement, on impose $x \notin \mathsf{fv}(\Gamma, \Delta)$. Cette condition peut toujours être satisfaite quitte à renommer la variable liée x.

Figure 1 – Règles du calcul des séquents LK_1 bilatère

Règle identité

$$\frac{}{\vdash \neg A, A, \Delta}\ \text{tiers-exclu}$$

Règles structurelles

$$\frac{\vdash \phi, \phi, \Delta}{\vdash \phi, \Delta}\ \text{contract}$$

Règles logiques propositionnelles

$$\frac{\vdash \phi, \Delta \quad \vdash \psi, \Delta}{\vdash \phi \wedge \psi, \Delta}\ \wedge \qquad \frac{}{\vdash \top, \Delta}\ \top \qquad \frac{\vdash \phi, \psi, \Delta}{\vdash \phi \vee \psi, \Delta}\ \vee$$

Règles logiques pour les quantificateurs du premier ordre

$$\frac{\vdash \phi, \Delta}{\vdash \forall x.\phi, \Delta}\ \forall\,(*) \qquad \frac{\vdash \phi[t/x], \Delta}{\vdash \exists x.\phi, \Delta}\ \exists$$

(*) Dans la règle $\forall$, la variable x ne doit apparaître que dans ϕ ; formellement, on impose $x \notin \mathsf{fv}(\Delta)$.

Figure 2 – Règles du calcul des séquents LK_1 monolatère

2 Calcul des séquents LK_1 monolatère

Nous avions observé que le calcul LK_0 pouvait se ramener à un calcul *monolatère*, dont les séquents sont simplement de la forme $\vdash \Delta$. Nous répétons cette observation pour LK_1, ce qui nous sera utile pour prouver la complétude de ce calcul. Ce calcul manipulera des séquents de la forme $\vdash \Delta$ où Δ est un multi-ensemble de formules du premier ordre. Ces séquents doivent simplement être compris comme un cas particulier des précédents où le multi-ensemble à gauche du signe $\vdash$ est vide. En particulier, la notion de validité pour les séquents monolatères est celle obtenue pour les séquents bilatères dans ce cas particulier.

Definition 2.1. *Le système de déduction LK_1 monolatère porte sur des séquents de la forme $\vdash \Delta$, où Δ est un multi-ensemble de formules du premier ordre en forme normale négative. Ses règles de déduction sont données en Figure 2.*

Par rapport au système bilatère, on abandonne les annotation L et R dans les noms des règles : chaque connecteur logique a maintenant exactement une règle d'introduction, et la contraction ne fait sens qu'à droite du séquent. Enfin, on a renommé l'axiome en tiers-exclu : la règle exprimait auparavant $A \Rightarrow A$ mais est désormais plus proche de $\neg A \vee A$, c'est à dire le principe du tiers exclu. Bien sûr les deux formules sont équivalentes, modulo mise en forme normale négative.

Pour expliciter le lien entre le système bilatère et le système monolatère, on a besoin de la notion de *forme normale négative* pour les formules du premier ordre, définie sans surprise :

$$\mathrm{nnf}(\neg\forall x.\phi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exists x.\mathrm{nnf}(\neg\phi) \qquad \mathrm{nnf}(\forall x.\phi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \forall x.\mathrm{nnf}(\phi) \qquad \text{etc.}$$

On définit alors $\mathrm{nnf}(\Delta)$ et $\mathrm{neg}(\Gamma)$ comme suit, pour pouvoir énoncer l'équivalence entre les calculs LK1 bilatère et monolatère :

$$\mathrm{nnf}(\phi_1, \ldots, \phi_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{nnf}(\phi_1), \ldots, \mathrm{nnf}(\phi_n).$$

$$\mathrm{neg}(\phi_1, \ldots, \phi_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{nnf}(\neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n).$$

Proposition 2.1. *Le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans le système LK_1 bilatère ssi $\vdash \mathrm{neg}(\Gamma), \mathrm{nnf}(\Delta)$ est prouvable dans LK_1 monolatère.*

Idée de preuve. Pour chaque direction on procède par induction sur la dérivation en entrée. Le passage du bilatère au monolatère est simple. Dans l'autre sens cela reste élémentaire mais il faut traiter de nombreux cas. Par exemple, l'introduction d'un $\forall$ dans $\mathrm{nnf}(\Delta)$ peut correspondre à une formule de Δ de la forme $\neg^{2k}\forall x.\phi$ ou bien $\neg^{2k+1}\exists x.\phi'$, et il faudra dériver ces formules différemment, en utilisant les règles de la négation et $\forall_R$ ou bien $\exists_L$. $\square$

En corollaire de ce résultat, on obtient que la complétude de LK_1 monolatère entraînerait celle de LK_1 bilatère. En effet si tout séquent monolatère valide est prouvable en LK_1 monolatère, alors pour tout séquent bilatère valide $\Gamma \vdash \Delta$, comme $\vdash \mathrm{nnf}(\Gamma), \mathrm{neg}(\Delta)$ est logiquement équivalent et donc valide, on obtient une preuve de ce séquent en LK_1 monolatère, et donc une preuve du séquent précédent en LK_1 bilatère.

3 Complétude

Nous présentons ci-dessous une preuve due à Hintikka, adaptée pour emprunter un style par “recherche de preuve”. En un certain sens, nous suivons la même approche que pour LK_0 : nous introduisons une procédure de recherche de preuve qui va aboutir sur les séquents valides, et nous donner un contre-modèle dans le cas contraire. La grosse différence avec LK_0 est que l'application des règles ne peut se faire de façon aussi gloutonne en LK_1 : les introductions de quantificateurs existentiels nécessitent le choix d'un bon terme ; d'autre part la contraction est nécessaire, car une même formule existentielle doit parfois être instanciée avec des termes différents pour être prouvée (nous le verrons plus loin avec la formule du buveur).

Nous supposons pour cette preuve que $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{X}$ sont dénombrables. Travaillant avec le calcul monolatère, nous ne considèrerons que des formules en forme normale négative.

Definition 3.1. *Un* choix *est :*

- *soit $\langle\phi\rangle$ où ϕ est une formule autre qu'un littéral, et dont le connecteur de tête n'est pas le quantificateur existentiel $\exists$;*

— *soit* $\langle \phi, t \rangle$ *où* ϕ *est de la forme* $\exists x.\psi$ *et* t *est un terme.*
Dans les deux cas on dira que ϕ *est la formule associée au choix.*

Un choix représente une façon de construire une preuve partielle :

Definition 3.2. *Étant donné un séquent monolatère* $\vdash \Gamma, \phi$ *et un choix* c *de formule associée* ϕ*, on définit la dérivation partielle* $\Pi_c(\Gamma, \phi)$ *comme suit :*

— *Si* $\phi \equiv \exists x.\psi$ *et* $c = \langle \phi, t \rangle$ *alors* $\Pi_c(\Gamma, \phi)$ *est la dérivation suivante :*

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma, \exists x.\psi, \psi\{x \mapsto t\}}{\vdash \Gamma, \exists x.\psi, \exists x.\psi}\ \exists}{\vdash \Gamma, \exists x.\psi}\ \text{contract}$$

— *Si* $\phi \equiv \forall x.\psi$ *alors* $\Pi_c(\Gamma, \phi)$ *est*

$$\dfrac{\vdash \Gamma, \psi\{x \mapsto y\}}{\vdash \Gamma, \forall x.\psi}\ \forall$$

où y *est une variable quelconque de* $\mathcal{X} \setminus \mathsf{fv}(\Gamma, \phi)$*, qui n'est jamais vide car* $\mathcal{X}$ *est infini et* Γ *fini. Cette dérivation est bien une application de la règle* $\forall$*, où l'on a explicité un* α*-renommage préalable, justifié car* $y \notin \mathsf{fv}(\phi)$*.*

— *Sinon,* $\Pi_c(\Gamma, \phi)$ *est obtenue en introduisant le connecteur de tête de* ϕ*, ce qui ne peut se faire que d'une façon possible. Par exemple si* $\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$ *alors on* $\Pi_{\langle \phi \rangle}(\Gamma, \phi)$ *est la dérivation suivante :*

$$\dfrac{\vdash \Gamma, \phi_1 \quad \vdash \Gamma, \phi_2}{\vdash \Gamma, \phi_1 \wedge \phi_2}\ \wedge$$

Ce cas couvre aussi la situation où $\phi \equiv \top$*, c'est le seul cas où l'introduction de* ϕ *ne crée aucune prémisse à justifier.*

Definition 3.3. *Une stratégie est une séquence infinie de choix* $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *dans laquelle tout choix apparaît infiniment souvent. Étant donné une stratégie* s *et un séquent* Γ *on définit la dérivation associée* $\Pi_s(\Gamma)$ *comme suit :*

— *Si* Γ *contient une formule atomique et sa négation alors* $\Pi_s(\Gamma)$ *est restreinte au tiers-exclu sur ces littéraux.*

— *Sinon, si* Γ *ne contient que des littéraux, alors la dérivation est restreinte à une feuille* $\vdash \Gamma$ *non justifiée.*

— *Sinon* Γ *contient au moins une formule qui n'est pas un littéral, et la stratégie* $s = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *contient une infinité de choix dont les formules associées sont dans* Γ*. Soit* c_i *le premier choix de* s *dont la formule associée est dans* Γ*. On définit* $s' = (c_j)_{j > i}$*, qui est toujours une stratégie. La dérivation* $\Pi_s(\Gamma)$ *est obtenue à partir de* $\Pi_{c_i}(\Gamma)$ *en en dérivant chaque feuille* $\vdash \Delta$ *par* $\Pi_{s'}(\Delta)$*.*

On remarquera que l'existence de stratégies est garantie par l'hypothèse de dénombrabilité des formules. On notera aussi que la dérivation $\Pi_s(\Gamma)$ n'est pas forcément une preuve : elle peut contenir des séquents non justifiés à ses feuilles ; ce n'est pas non plus forcément un arbre fini puisque le troisième cas peut se répéter pour générer des branches infinies.

Exemple 3.1. *Soit* $\phi \equiv \exists x.\neg B(x) \vee \forall y.B(y)$ *la formule du buveur. Soit* s *une stratégie de la forme* $\langle \phi, t\rangle, \langle \neg B(t) \vee \forall y.B(y)\rangle, \langle \forall y.B(y)\rangle, \langle \phi, z\rangle, \langle \neg B(z) \vee \forall y.B(y)\rangle, \ldots$ *où* t *est un terme quelconque et* z *est une variable n'apparaissant pas dans* t*. Alors* $\Pi_s(\phi)$ *est la dérivation suivante, qui est aussi une preuve :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \phi, \neg B(t), B(z), \neg B(z), \forall y.B(z)}\text{tiers}-\text{exclu}}{\vdash \phi, \neg B(t), B(z), \neg B(z) \vee \forall y.B(z)}\vee}{\vdash \phi, \neg B(t), B(z)}\text{contract}, \exists}{\vdash \phi, \neg B(t), \forall y.B(y)}\forall}{\vdash \phi, \neg B(t) \vee \forall y.B(y)}\vee}{\vdash \phi}\text{contract}, \exists$$

Cette dérivation est minimale en taille parmi les dérivations de ϕ*. La même dérivation serait obtenue par insertion dans* s *de formules non présentes dans les séquents engendrés. De façon plus remarquable, on verra que* $\Pi_{s'}(\phi)$ *est une preuve pour tout* s'*, et quels que soient les choix des variables pour les règles* $\forall$*, même si la preuve obtenue ne serait pas forcément aussi courte qu'ici. Ici, le choix de* z *pour l'introduction du premier* $\forall$ *a le bon goût de coïncider avec le terme utilisé pour le second choix sur* ϕ*, i.e.* $\langle \phi, z\rangle$*. Mais si une autre variable* z' *avait été choisie,* $\langle \phi, z'\rangle$ *aurait dû apparaître plus loin dans la stratégie (et même infiniment souvent) et l'on aurait donc fini (après un certain nombre de règles pas forcément utiles) par instancier* ϕ *avec* z'*. Par le même argument, la disjonction de la formule résultante finirait aussi par être introduite, après quoi la preuve serait terminée par application du tiers-exclu.*

Definition 3.4 (Branche d'échec)**.** *Soit* s *une stratégie et* $\vdash \Gamma$ *un séquent. Une branche d'échec de* $\Pi_s(\Gamma)$ *est une branche de cette dérivation qui est :*

— *soit une branche finie s'arrêtant sur un séquent non justifié ;*
— *soit une branche infinie.*

On notera que la dérivation $\Pi_s(\Gamma)$ est une preuve ssi elle ne contient pas de branche d'échec. Notre objectif est désormais de montrer que si $\Pi_s(\Gamma)$ n'est pas une preuve alors $\vdash \Gamma$ n'est pas valide : pour cela on va construire un contre-modèle d'une branche d'échec quelconque de $\Pi_s(\Gamma)$.

Definition 3.5 (Structure associée)**.** *Si* β *est une branche d'échec de* $\Pi_s(\Gamma)$ *on définit la structure* $\mathcal{S}_\beta$ *de domaine* $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ *en posant, pour tout prédicat* $P \in \mathcal{P}$ *d'arité* n*,*

$$P_{\mathcal{S}_\beta} = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid P(t_1, \ldots, t_n) \textit{ n'apparaît pas dans } \beta\}$$

(On dit qu'une formule atomique apparaît dans β *si c'est un élément d'un des séquents de la branche ; il n'est pas question ici de sous-formule.)*

Dans la mesure où l'on considère ici des structures de domaine $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, nous nous permettrons quelques abus en rapprochant syntaxe et sémantique. Quand ϕ a des variables libres, $\mathcal{S} \models \phi$ n'est pas défini. On s'autorisera ici à l'écrire, en le comprenant implicitement comme $\mathcal{S}, \mathrm{id} \models \phi$ où id est l'affectation qui envoie toute variable de $\mathcal{X}$ (vue comme une notation dans la syntaxe) sur elle même (vue comme un élément dans le domaine sémantique).

Exemple 3.2. *Soit $\phi \equiv P(a) \vee \forall x.\neg P(x)$, où a est une constante de Σ. Soit Γ le séquent $\phi, \neg P(a) \wedge \bot$. Soit s une stratégie débutant par les choix $\langle \phi \rangle$, $\langle \forall x.\neg P(x) \rangle$ et $\langle \neg P(a) \wedge \bot \rangle$. Une dérivation associée est :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash P(a), \neg P(y), \neg P(a)} \quad \vdash P(a), \neg P(y), \bot}{\vdash P(a), \neg P(y), \neg P(a) \wedge \bot}}{\vdash P(a), \forall x.\neg P(x), \neg P(a) \wedge \bot}}{\vdash \phi, \neg P(a) \wedge \bot}$$

La branche de droite est une branche d'échec finie. Sa structure associée rend P vrai sur tous les termes sauf a. Ainsi $\mathcal{S}_\beta \not\models P(a)$ et $\mathcal{S}_\beta \not\models \neg P(y)$. Plus généralement, on peut vérifier que $\mathcal{S}_\beta$ est un contre-modèle de chaque séquent de β.

Exemple 3.3. *On considère $\psi = \exists x.\neg P(x, x) \vee \forall y.P(x, y)$ et une stratégie s où tout choix de la forme $\langle \psi, t \rangle$ est immédiatemment suivi de $\langle \neg P(t, t) \vee \forall y.P(t, y) \rangle$ puis $\langle \forall y.P(t, y) \rangle$. Alors la dérivation $\Pi_s(\psi)$ consiste en une unique branche infinie β de la forme suivante :*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash \psi, \neg P(t_1, t_1), P(t_1, y_1), \neg P(t_2, t_2), P(t_2, y_2)}\ \text{contract}, \exists, \forall}{\vdash \psi, \neg P(t_1, t_1), P(t_1, y_1)}\ \text{contract}, \exists, \forall}{\vdash \psi}\ \text{contract}, \exists, \forall$$

Où, pour tout i, on a :

$$y_1 \notin \mathsf{fv}(t_1, \ldots, t_i, y_1, \ldots, y_{i-1})$$

En particulier $y_i = t_i$ est impossible, c'est pourquoi on ne peut jamais appliquer la règle du tiers-exclu. De plus, pour tout $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ il existe i tel que $t \equiv t_i$ — il y a même une infinité d'indices i qui conviennent, sinon s ne serait pas une stratégie. On a $P_{\mathcal{S}_\beta} = \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})^2 \setminus \{(t_i, y_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, pour tout t, comme $t \equiv t_i$ pour un $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_\beta \models P(t_i, t_i)$ et $\mathcal{S}_\beta \not\models P(t_i, y_i)$, d'où $\mathcal{S}_\beta \not\models \phi$.

Nous nous attachons désormais à prouver de façon générale que $\mathcal{S}_\beta$ est un contre-modèle de tout séquent de β.

Proposition 3.1. *Soit β une branche d'échec de $\Pi_s(\Gamma)$. Si le $i^{ème}$ séquent[1] de β est de la forme $\vdash \Gamma, \phi$ avec ϕ qui n'est pas un littéral, alors il existe $k \geq 0$ tel que ϕ est la formule principale du $(i+k)^{ème}$ séquent, i.e. la règle qui a pour conclusion ce séquent est une introduction de ϕ.*

Démonstration. Posons d'abord quelques notations. Pour tout j, on note Γ_j le séquent associé au $j^{\text{ème}}$ noeud de β. On note s_j le suffixe de s associé au $j^{\text{ème}}$ noeud de β, i.e. tel que la sous-dérivation de $\Pi_s(\Gamma)$ de racine ce noeud est $\Pi_{s_i}(\Gamma_i)$. On écrit enfin $s = (c_j)_{j \geq 0}$. Pour tout i il existe o_i tel que $s_i = (c_{o_i + j})_{j \geq 0}$.

1. Pour simplifier les notations on ne compte pas les séquents "intermédiaires" qui sont prémisses d'une règle contraction, i.e. les séquents $\Gamma, \exists x.\psi, \exists x.\psi$ dans le premier item de la définition 3.2.

On s'intéresse au premier choix de s_i qui concerne ϕ : soit p_0 minimal tel que ϕ est la formule associée au choix $c_{o_i+p_0}$ — l'existence est garantie par définition des stratégies. Analysons la construction de $\Pi_{s_{i+j}}(\Gamma_{i+j})$ pour j allant croissant de 0 à p_0 en construisant, tant que ϕ n'est pas introduite, la position p_j du choix $c_{o_i+p_0}$ dans le suffixe s_{i+j} : pour chaque j une formule de Γ_{i+j} doit être introduite, car β est une branche d'échec donc le tiers-exclu ne peut s'appliquer ; si c'est ϕ elle même, $k = j$ convient ; sinon on a toujours $\phi \in \Gamma_{i+j+1}$ mais aussi $o_{i+j+1} > o_{i+j}$ et $c_{o_{i+j}+p_j} = c_{o_{i+j+1}+p_{j+1}}$ pour un $p_{j+1} < p_j$. Si ϕ n'était jamais introduite sur cet intervalle $[0; p]$ on aurait alors $p_0 > p_1 > \ldots > p_p \geq 0$ ce qui est absurde. $\square$

Le résultat précédent peut se renforcer dans le cas d'une formule existentiellement quantifiée :

Proposition 3.2. *Soit β une branche quelconque de $\Pi_s(\Gamma)$, tel que le $i^{\text{ème}}$ séquent de β est de la forme $\vdash \Gamma, \exists x.\psi$. Soit t un terme quelconque. Il existe $k \geq 0$ tel que le $(i+k)^{\text{ème}}$ séquent de β est de la forme $\vdash \Delta, \exists x.\psi$ et est dérivé comme suit dans β :*

$$\cfrac{\cfrac{\vdash \Delta, \exists x.\psi, \psi\{x \mapsto t\}}{\vdash \Delta, \exists x.\psi, \exists x.\psi}}{\vdash \Delta, \exists x.\psi}$$

Démonstration. C'est le même argument que précédemment en considérant la première occurrence de $\langle \exists x.\psi, t\rangle$ dans s_i, et en utilisant le fait que si un choix $\langle \exists x.\psi, t'\rangle$ apparait avant $\langle \exists x.\psi, t\rangle$ dans s_i alors $\exists x.\psi$ reste présente dans le séquent Γ_{i+j+1} grâce à la contraction qui a été faite sur cette formule dans $\Pi_{s_{i+j}}(\Gamma_{i+j})$. $\square$

Nous pouvons enfin prouver notre résultat central :

Lemma 3.1. *Soit β une branche d'échec de $\Pi_s(\Gamma)$. Si $\vdash \Delta, \phi$ apparaît dans β alors $\mathcal{S}_\beta \not\models \phi$.*

Démonstration. On procède par induction sur ϕ apparaissant dans le $i^{\text{ème}}$ séquent de β. On reprend les notations de la preuve précédente.

Traitons tout d'abord le cas où ϕ est un littéral. Si ϕ est un littéral positif alors, par définition de $\mathcal{S}_\beta$, on a $\mathcal{S}_\beta \not\models \phi$. Si ϕ est un littéral négatif $\neg A$, $\mathcal{S}_\beta \models A$ car A ne peut apparaître dans β : en effet, si un littéral apparait dans le $i^{\text{ème}}$ séquent d'une branche, on constate aisément qu'il doit apparaitre dans tous les séquents suivants ; et si A apparaissait, comme $\phi \equiv \neg A$ apparait aussi, il y aurait un séquent où ils apparaissent tous deux, et le tiers-exclu s'appliquerait, ce qui contredit le fait que β est une branche d'échec.

Si ϕ n'est pas un littéral alors par la proposition 3.1 il existe un séquent plus haut où ϕ est introduite. On procède par cas selon le connecteur de tête de ϕ :

- Si $\phi \equiv \phi_1 \vee \phi_2$ l'introduction a la forme suivante :

$$\cfrac{\vdash \Delta, \phi_1, \phi_2}{\vdash \Delta, \phi_1 \vee \phi_2}$$

  Donc ϕ_1 et ϕ_2 apparaissent dans la branche, et par hypothèses d'induction $\mathcal{S}_\beta \not\models \phi_1$ et $\mathcal{S}_\beta \not\models \phi_2$, donc $\mathcal{S}_\beta \not\models \phi$.

— Dans le cas où $\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$ l'introduction est de la forme

$$\frac{\vdash \Delta, \phi_1 \quad \vdash \Delta, \phi_2}{\vdash \Delta, \phi_1 \wedge \phi_2}$$

où une (et une seule) des deux prémisses est dans la branche. Donc on a ϕ_i dans β pour un $i \in \{1, 2\}$, d'où $\mathcal{S}_\beta \not\models \phi_i$ par hypothèse d'induction, ce qui permet de conclure $\mathcal{S}_\beta \not\models \phi$.

— Le cas $\phi \equiv \top$ est absurde, car $\top$ serait alors introduit et β ne serait pas une branche d'échec.

— Le cas $\phi \equiv \forall x.\psi$ n'est pas très différent. L'introduction de ϕ est de la forme

$$\frac{\vdash \Delta, \psi\{x \mapsto y\}}{\vdash \Delta, \forall x.\psi}$$

donc $\psi\{x \mapsto y\}$ est présente dans le séquent. Par hypothèse d'induction on a $\mathcal{S}_\beta, \mathrm{id} \not\models \psi\{x \mapsto y\}$. Par le lemme de substitution, $\mathcal{S}_\beta, \{x \mapsto y\}\mathrm{id} \not\models \psi$, d'où $\mathcal{S}_\beta, \mathrm{id} \not\models \forall x.\psi$.

— Le cas le plus délicat est celui où $\phi \equiv \exists x.\psi$. On utilise alors la proposition 3.2 : pour chaque $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, on a dans la branche une dérivation de la forme

$$\frac{\dfrac{\vdash \Delta, \exists x.\psi, \psi\{x \mapsto t\}}{\vdash \Delta, \exists x.\psi, \exists x.\psi}}{\vdash \Delta, \exists x.\psi}$$

et, par hypothèse d'induction $\mathcal{S}_\beta \not\models \psi\{x \mapsto t\}$. Par le lemme de substitution cela signifie que, pour tout t, $\mathcal{S}_\beta, \{x \mapsto t\}\mathrm{id} \not\models \psi$, ce qui nous permet bien de conclure $\mathcal{S}_\beta, \mathrm{id} \not\models \exists x.\psi$.

$\square$

Théorème 3.1. *Les calculs LK$_1$ sont complets :*

— *si $\vdash \Gamma$ est valide et en forme normale négative alors il est dérivable dans LK$_1$ monolatère ;*

— *si $\Gamma \vdash \Delta$ est valide alors il est dérivable en LK$_1$ bilatère.*

Démonstration. Considérons d'abord $\Pi_s(\Gamma)$, pour un séquent $\vdash \Gamma$ en forme normale négative, avec une stratégie s quelconque. Si Γ est valide alors $\Pi_s(\Gamma)$ ne peut comporter de branche d'échec par le lemme précédent, donc c'est une preuve de LK$_1$ monolatère.

Soit ensuite un séquent $\Gamma \vdash \Delta$. S'il est valide alors $\vdash \mathrm{neg}(\Gamma), \mathrm{nnf}(\Delta)$ l'est aussi, et est donc dérivable en LK$_1$ monolatère. On conclut, par la proposition 2.1, que $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable en LK$_1$ bilatère. $\square$

Notre théorème de complétude a des corollaires usuels :

— *Toute règle valide est admissible.* Par exemple, les règles *cut* bilatères et monolatères, i.e.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \phi \quad \phi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ et } \frac{\vdash \Gamma, \mathrm{neg}(\phi) \quad \vdash \phi, \Gamma}{\vdash \Gamma}$$

sont valides (i.e. si les prémisses sont valides alors la conclusion l'est) et sont donc admissibles dans les calculs LK_1 respectifs (i.e. si les prémisses sont dérivables avec les règles de la définition "officielle" du calcul considéré, alors la conclusion est dérivable avec ces mêmes règles).

— *Certaines règles de la définition des calculs ne sont pas nécessaires.* Au vu de notre preuve de complétude, on peut ici conclure que la règle de contraction n'est nécessaire que quand elle est utilisée pour une formule quantifiée existentiellement.

Si l'on renforce un peu notre résultat de complétude, on peut obtenir un corollaire plus intéressant : la compacité, que nous énonçons ici en termes de validité plutôt que d'insatisfaisabilité.

Théorème 3.2 (Compacité)**.** *Soit E un ensemble de formules et ϕ une formule telle que $E \models \phi$. Il existe un sous-ensemble $E' \subseteq E$ fini tel $E' \models \phi$.*

Afin de montrer cela, on renforce le résultat de complétude du calcul monolatère, où l'on dit qu'un ensemble de formules est valide si toute structure satisfait au moins une formule de l'ensemble :

Théorème 3.3. *Soit F un ensemble de formules tel que $\mathcal{X} \setminus \mathsf{fv}(F)$ est infini. Si F est valide alors il existe un sous-ensemble $\Gamma \subseteq F$ fini tel que $\vdash \Gamma$ est dérivable en LK_1 monolatère.*

Démonstration. Autorisons nous à considérer des séquents généralisés qui peuvent contenir un ensemble infini de formules. Les règles de LK_1 monolatère s'appliquent de la même façon sur ces séquents généralisés. On peut alors généraliser la définition de Π_s : la seule difficulté est de pouvoir choisir des variables libres non-utilisées pour l'application des règles $\forall$, mais cela est assuré par l'hypothèse sur $\mathcal{X} \setminus \mathsf{fv}(F)$, qui reste vraie pour tous les ensembles engendrés dans la construction de $\Pi_s(F)$. Le lemme principal assurant que toute branche d'échec a un contre-modèle reste vrai : rien ne change à sa démonstration. Donc, si F est valide, $\Pi_s(F)$ ne peut avoir de branche d'échec. C'est donc un arbre fini, dans lequel seul un nombre fini de formules de F joue un rôle. En enlevant les formules inutiles on obtient $F' \subseteq F$ fini et une preuve de $\vdash F'$. □

Démonstration du théorème 3.2. Si $E \models \phi$ alors $\mathrm{neg}(E), \phi$ est valide. Quitte à élargir $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}'$, on peut de plus supposer que $\mathcal{X}' \setminus \mathsf{fv}(\mathrm{neg}(E), \phi)$ est infini, cela ne change rien à la validité de $\mathrm{neg}(E), \phi$. Par le résultat de complétude renforcé, il existe $E' \subseteq E$ fini tel que $\vdash \mathrm{neg}(E'), \phi$ est dérivable en LK_1 monolatère. Ainsi $\mathrm{neg}(E'), \phi$ est valide, et $E' \models \phi$ — et cela reste le cas si on se restreint à l'ensemble de variables original $\mathcal{X}$, qui contient les variables libres de E' et ϕ. □