TD6 2 mars 2016

Langages Formels

David Baelde
<baelde@lsv.ens-cachan.fr>

On rappelle qu'un automate à pile $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F)$ est donné par :

- un ensemble fini d'états Q,
- un alphabet d'entrée Σ,
- un alphabet de pile Z,
- une configuration initiale $q_0 z_0 \in QZ$,
- une fonction de transition $T \subseteq QZ \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times QZ^*$,
- un ensemble d'états finaux $F \subseteq Q$.

Exercice 1 — Constructions d'automates
Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants :

1. $L_1 = \{ w\widetilde{w} \ : \ w \in \Sigma^* \}$
2. $L_2 = \overline{L_1}$, son complémentaire
3. $L_3 = \overline{L'}$ où $L' = \{ ww \ : \ w \in \Sigma^* \}$
4. $L_4 = \{ a^n b^n \ : \ n \geq 0 \} \cup \{ a^n b^{2n} \ : \ n \geq 0 \}$

Exercice 2 — Push-pop
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F)$ un automate à pile. Construire un automate équivalent $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, Z', T', q'_0 z_0, F')$ dont toutes les transitions $\delta \in T'$ soient de type push ou pop, avec :

- δ est push si elle est de la forme $(qz, a, q'z'z)$: une seule lettre est rajoutée sur la pile ;
- δ est pop si elle est de la forme (qz, a, q') : une lettre est effacée de la pile.

Exercice 3 — Mots de pile
Soit $\mathcal{A}$ un automate à pile, et $pg \in QZ^*$. Le langage des mots de pile engendrés par pg est [1] :

$$\mathcal{C}(pg) = \{\ qh \in QZ^* \ :\ pg \to^+ qh \text{ dans } \mathcal{T}\ \}$$

On veut montrer que $\mathcal{C}(pg)$ est régulier. On considère l'alphabet $\Gamma = Q \uplus Z \uplus \overline{Q} \uplus \overline{Z}$, et la relation de simplification suivante sur les mots de Γ^* :

$$u\overline{q}qv \rightsquigarrow uv \qquad u\overline{z}zv \rightsquigarrow uv$$

Pour $L \subseteq \Gamma^*$, on pose $\mathsf{Clot}(L) = \{\ v \ :\ u \rightsquigarrow^* v \text{ pour un } u \in L\ \}$.

1. Montrer que, si L est régulier, alors $\mathsf{Clot}(L)$ aussi.
2. Soit $K = \{\ qh\overline{xp} \ :\ px \xrightarrow{a} qh \text{ dans } T\ \}$. Montrer que $pg \to^n qh$ dans $\mathcal{T}$ ssi il existe $w \in K^n$ tel que $wpg \rightsquigarrow^{2n} qh$.
3. Conclure.

Exercice 4 — Calculs d'accessibilité
Montrer que l'on peut calculer les ensembles suivants sur un automate à pile :
- $X_1 = \{\ pzq \in QZQ \ :\ pz \to^+ q \text{ dans } \mathcal{T}\ \}$
  On exprimera X_1 comme un plus petit point fixe.
- $X_2 = \{\ pz \in QZ \ :\ pz \to^\omega \text{ dans } \mathcal{T}\ \}$ où $\to^\omega$ est la réduction infinie.
  On exprimera X_2 comme un plus grand point fixe.

1. Dans $\mathcal{T}$, $\to$ veut dire $\xrightarrow{a}$ pour un a, et $\to^+$ veut dire $\xrightarrow{w}^+$ pour un w.