λ-calcul et logique informatique

baelde@lsv.ens-cachan.fr

Exercice 1 — Combinateurs

On définit le calcul de combinateurs **SK** : les termes sont construits suivant la grammaire

$$M := \mathcal{V} \mid (M\ M) \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{K}$$

et la réduction est plus petite congruence contenant

$$\mathbf{K}\ M\ N \to M \qquad \mathbf{S}\ M\ N\ P \to (M\ P)\ (N\ P)$$

1. On pose $\mathbf{I} := \mathbf{S}\ \mathbf{K}\ \mathbf{K}$. Réduire $\mathbf{I}\ M$ pour un terme M quelconque.
2. Construire une traduction de $\mathcal{C}$ dans Λ tel que $M \to N$ implique $[M] \to_\beta [N]$ pour tous $M, N \in \mathcal{C}$.
3. Définir une construction λ^*, prenant une variable et un terme de $\mathcal{C}$ et renvoyant un nouveau terme de $\mathcal{C}$ de sorte que $\lambda^*(x, M)N \to^* M[x := N]$ pour tout N. On procèdera par induction sur M, en commençant par les variables, et en utilisant le "distributeur" **S** pour l'application.
4. A-t-on $\mathbf{K} \leftrightarrow^* \lambda^*(x, \lambda^*(y, x))$?
5. Définir une traduction de Λ dans $\mathcal{C}$ telle que $u \to_\beta v$ implique $[u] \to^* [v]$.

Exercice 2 — Encodages (un dernier pour la route)

On propose le codage suivant pour les listes :

$$[e_1; \ldots; e_n] = \lambda f \lambda x.\ f\ e_1 (f\ e_2 \ldots (f\ e_n e)$$

1. Donner un terme C qui encode l'ajout d'un élément à une liste, tel que $C\ e_0\ [e_1; \ldots; e_n] = [e_0; e_1; \ldots; e_n]$.
2. Coder la concaténation, ...
3. le renversement, ...
4. et la fonction qui à une liste non vide associe sa queue.

En bonus, on pourra chercher la recette commune derrière les encodages des booléens, entiers naturels et listes, en passant par leur écriture comme des types sommes en Caml.

Exercice 3 — Autour de l'équivalence comportementale

Un contexte est un λ-terme avec un trou, qu'on représentera par un terme spécial []. L'opération de mise en contexte $C[u]$ est définie comme le remplacement *textuel* de ce trou par le terme u : contrairement à la substitution $C[[] := u]$, il est important que ce remplacement provoque la capture des variables libres de u. Par exemple, si $C = (\lambda x.\ [])$ et $C' = (\lambda y.\ [])$ alors $C[x] = (\lambda x.\ x)$ est un terme différent de $C'[x] = (\lambda y.\ x)$.

Un contexte ne contient pas forcément un unique trou : on peut avoir $C[u] = u\ u$ pour tout u (deux trous), et aussi $C[u] = v$ pour tout u (aucun trou). On peut enfin naturellement généraliser la notion de contexte à plusieurs arguments, pour parler de contextes comme $C[u][v] = u\ (u\ v)$ pour tout u et v.

Pour faciliter le raisonnement sur les réductions de termes en contexte, nous admettrons le résultat suivant : Soient $u_1, \dots, u_n$ des termes clos et C un contexte n-aire tel que $C[\vec{u}] \to v$. Alors on a :

(1) La réduction est dans C : v peut s'écrire $C'[\vec{u}]$ tel que pour tous termes $\vec{t}$ clos on a $C[\vec{t}] \to C'[\vec{t}]$.

ou (2) La réduction est dans un certain u_i : $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i]$ pour tout $\vec{t}$, et $v = C'[\vec{u}, u']$ avec $u_i \to u'$.

ou (3) La réduction implique C et un u_i : $C[\vec{t}] = C'[\vec{t}, t_i\ w]$ pour tout $\vec{t}$, $u_i = (\lambda x.\ u')$ et $v = C'[\vec{u}, u'[x := w]]$.

On dit que deux termes u et v sont *séparables* s'il existe un contexte C tel que $C[u] \to^* T$ et $C[v] \to^* F$.

1. Montrer que la séparabilité est une relation irréflexive et symétrique.
2. Montrer que $(\lambda f \lambda x.\ f\ x)$ et $(\lambda f \lambda x.\ f\ (f\ x))$ sont séparables.
3. Montrer que si $C[\Omega] \to^* t$ avec t en forme normale, alors pour tout u clos on a aussi $C[u] \to^* t$.
   En déduire que I et Ω sont inséparables.

On écrit $u \downarrow_\beta$ quand u normalise faiblement pour la β-réduction, *i.e.*, $u \to^* t$ avec t sans β-redex. On dit que u et v sont en *équivalence comportementale*, noté $u \approx v$, si pour tout contexte C on a $C[u] \downarrow_\beta$ ssi $C[v] \downarrow_\beta$. De façon évidente, $\approx$ est une relation d'équivalence et une congruence, et deux termes α-équivalents sont en équivalence comportementale.

4. Montrer que $\to$ est contenue dans $\approx$.
5. Soient u, v tels que $u \to^* \lambda x.\ v$. Montrer $u \approx (\lambda y.\ u\ y)$ pour $y \notin \mathrm{FV}(u)$.
6. Montrer que si v n'est pas résoluble alors, pour toute substitution θ, $v\theta$ n'est pas résoluble.
7. Démontrer $u \not\approx v$ pour u résoluble et v non résoluble.
8. On montre finalement que l'équivalence comportementale est strictement incluse dans l'inséparabilité :
   (a) Donner deux termes t et t' inséparables mais tels que $t \not\approx t'$.
   (b) Montrer que si u et v sont séparables alors ils ne sont pas en équivalence comportementale.