

λ -Calcul et Logique Informatique

Jean Goubault David Baelde
`{goubault,baelde}@lsv.ens-cachan.fr`

Exercice 1 Quiz

Parmi les termes suivant, indiquer lesquels sont α -équivalents et lesquels sont β -équivalents :

1. $(\lambda x. \lambda y. x) x$
2. $\lambda x. x$
3. $(\lambda x. \lambda x. x) x$
4. $(\lambda x. \lambda y. y) x$
5. $(\lambda x. \lambda y. y) (\lambda x. x)$

Exercice 2 Unification

Dans la suite, l'égalité dénote la β -équivalence.

1. Pour quels termes M , N et P , pas forcément clos, a-t-on l'équivalence suivante ?

$$(\lambda y. (\lambda x. M) N) P = (\lambda x. (\lambda y. M) P) N$$

2. Pour chacune des équations suivantes, caractériser les termes clos M et N qui rendent l'équivalence vraie :

$$(\lambda x. M) = N$$

$$(\lambda x. \lambda y. M x) = (\lambda x. \lambda y. N y)$$

3. Donner une infinité de termes clos M tels que :

$$(\lambda z. \lambda s. s (M s z)) = (\lambda z. \lambda s. M s (s z))$$

Exercice 3 Booléens

On code les booléens comme des projections dans le λ -calcul :

$$\begin{aligned} [\top] &= \lambda x.\lambda y.x \\ [\perp] &= \lambda x.\lambda y.y \end{aligned}$$

Donner les encodages de la conjonction, la disjonction et la négation. Formellement, on cherche par exemple un terme A tel que $A [b] [b'] = [b \wedge b']$ pour tous booléens b et b' .

Exercice 4 Réduction parallèle

Dans cet exercice, la flèche simple \rightarrow dénote la β -réduction. On définit la réduction parallèle comme suit :

$$\begin{array}{l} \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'} \text{ app} \qquad \frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'} \text{ abs} \\ \overline{u \Rightarrow u} \text{ refl} \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']} \text{ beta} \end{array}$$

1. Montrer les inclusions suivantes en donnant des exemples illustrant qu'elles sont strictes :

$$\rightarrow \subseteq \Rightarrow \subseteq \rightarrow^*$$

2. Montrer que \Rightarrow est fortement confluente.
3. En déduire que \rightarrow est confluente.