Beaux préordres – *well quasi-orders*

Ph. Schnoebelen

Lab. Spécification et Vérification (LSV)

CNRS & ENS de Cachan

`http://www.lsv.ens-cachan.fr/~phs`

Ordres et préordres

Rappels 1.1. $(X, \leq)$ *préordre, quasi-ordre, ordre, ordre linéaire, ordre total.*

On identifie un préordre $(X, \leq)$ avec l'ordre $(X/\equiv, \leq)$ obtenu par quotient : $x \equiv y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y \leq x$.

Exemple 1.2. $(\mathbb{Z}, |) \approx (\mathbb{N}, |)$.

Définition 1.3. *À partir de* $(X, \leq)$ *on construit* $(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq)$ *avec* $S \sqsubseteq S' \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in S, \exists y \in S', x \leq y$.

C'est bien un préordre, total ssi $(X, \leq)$ *est total.*

Exemple 1.4. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \sqsubseteq) \approx (\mathbb{N} \cup \{-\infty, +\infty\}, \leq)$.

Ordres sur les mots

$X^\infty \stackrel{\text{def}}{=} X^* \cup X^\omega$ est l'ensemble des mots finis et infinis $u, v, \ldots$ sur X.

Définition 1.5 (ordre facteur gauche, ordre lexicographique).

$$u \leq_{\text{fg}} v \quad \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \quad \exists w, v = uw.$$

$$u <_{\text{lex}} v \quad \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} \exists i : u(1..i) = v(1..i) \ \textit{et} \ u(i+1) < v(i+1), \\ \textit{ou bien } u <_{\text{fg}} v. \end{cases}$$

Définition 1.6 (sous-mot, plongement).

$u \sqsubseteq v \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall i : u(i) \leq v(n_i)$ *pour une suite* $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Exercice 1.7. $(X^\infty, \leq_{\text{lex}})$ *est un ordre total ssi* $(X, \leq)$ *est total.*

Ordres bien fondés

Définition 1.8. $(X, \leq)$ *est* bien fondé *ssi il n'existe pas de chaîne infinie décroissante* $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$

Exercice 1.9. *Quels ordres sont bien fondés :*

$(\mathbb{N}, \leq)$ *?* $(\mathbb{Z}, |)$ *?*

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *avec* $\subseteq$ *? avec* $\sqsubseteq^{(\leq)}$ *? avec* $\sqsubseteq^{(|)}$ *? avec* $\sqsubseteq^{(\geq)}$ *?*

idem avec $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ *?*

Exercice 1.10. $\Sigma = \{a, b, c, \ldots\}$ *est fini. On considère deux ordres sur* Σ *: l'identité et un ordre total. Quels ordres sur les mots sont bien fondés :*

$(\Sigma^*, \leq_{\text{lex}})$ *?* $(\Sigma^*, \leq_{\text{fg}})$ *?* $(\Sigma^*, \sqsubseteq)$ *?*

WQO = Well quasi-order

Définition 2.1. $(X, \leq)$ *est* wqo *ssi de toute suite infinie* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *on peut extraire une* sous-suite infinie croissante $x_{i_0} \leq x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \cdots$

Un wqo est bien fondé mais la réciproque n'est pas vraie, p.ex. $(\mathbb{N}, |)$.
Un ordre total bien fondé est wqo.

Exercice 2.2. *Quels ordres sont wqo :*

$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$? $(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}), \sqsubseteq)$?

Lemme 2.3. $(X, \leq)$ *est wqo ssi de toute suite infinie* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *on peut extraire une* paire croissante $x_i \leq x_j$ *avec* $i < j$*.*

Fermés vers le haut

On considère $(X, \leq)$ un wqo.

Définition 2.4. $S \subseteq X$ *est* fermé vers le haut *ssi* $(S \ni x \leq y) \Rightarrow y \in S$.

$\uparrow S \stackrel{def}{=} \{y \mid \exists x \in S, x \leq y\}$ *est la* fermeture *de* S.

Lemme 2.5. *Soit* $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$ *une suite infinie croissante de fermés vers le haut. Alors* $\exists n : S_n = S_{n+1} = S_{n+2} = \ldots$.

Lemme 2.6. [Hig52] *Tout* $S \subseteq X$ *fermé vers le haut a une base finie :* $S = \uparrow \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Lemme de Higman

Théorème 3.1 (Higman). $(X, \leq)$ *wqo ssi* $(X^*, \sqsubseteq)$ *wqo.*

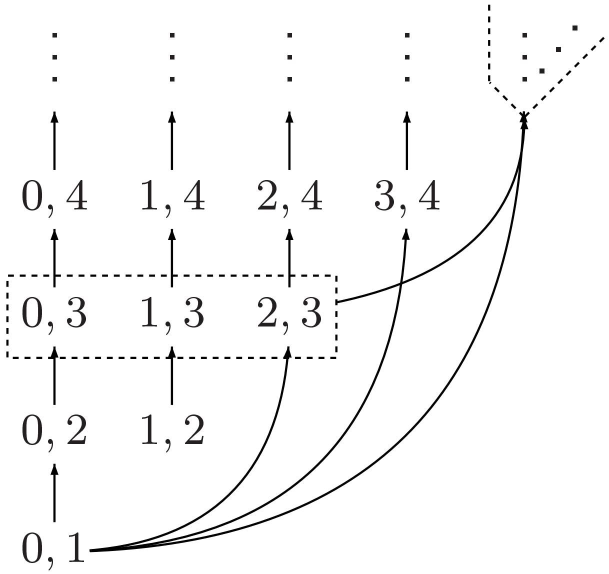
Corollaire 3.2. *Soit* $L \subseteq \Sigma^*$ *un langage fermé par sous-mot. Alors* L *est régulier.*

Problème 3.3. *Est-ce que* $(X, \leq)$ *wqo implique* $(X^\omega, \sqsubseteq)$ *wqo ?*

Indication 1 : ça marche pour $\mathbb{N}^\omega$.

Indication 2 : ça marche si $(X, \leq)$ *est total.*

La structure de Rado



$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$$

$$(a,b) <_{\text{Rado}} (a',b') \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = a' \text{ et } b < b', \\ \text{ou bien } b < a'. \end{cases}$$

Exemple 3.4. [Jan99]
$(X, <_{\text{Rado}})$ est wqo.

$(X^\omega, \sqsubseteq)$ n'est pas wqo.

$(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq)$ n'est pas wqo.

Arbres étiquetés

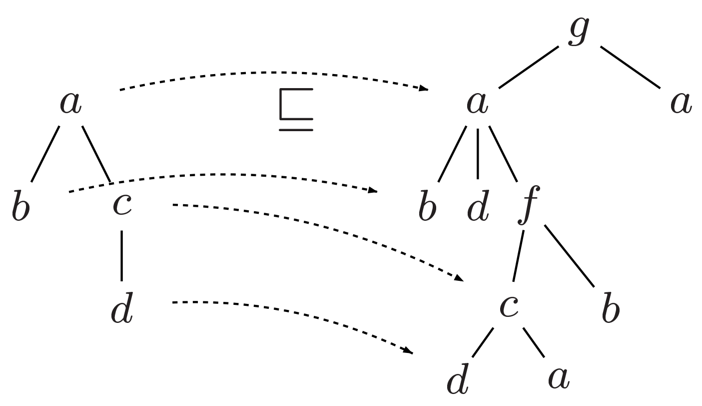
$T(X) = \{s, t, \ldots\}$ désigne l'ensemble des arbres finis avec noeuds étiquetés via X.

Définition 4.1 (plongement entre arbres). *Soit $s = x(s_1, \ldots, s_n)$ et $t = y(t_1, \ldots, t_m)$. Alors $s \sqsubseteq t$ ssi (1) $\exists i : s \sqsubseteq t_i$, ou bien (2) $x \leq y$ et $\forall i = 1, \ldots, n : s_i \sqsubseteq t_{k_i}$ pour un plongement $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n \leq m$.*

Remarque 4.2. *Il existe une définition équivalente en termes d'application injective des noeuds de s dans ceux de t.*

Théorème de Kruskal

Exemple 4.3. *On considère* $\Sigma = \{a, b, c, \ldots\}$ *avec ordre trivial :*



Théorème 4.4. [Kru60] $(X, \leq)$ *wqo ssi* $(T(X), \sqsubseteq)$ *wqo.*

Références

[Dic13] L. E. Dickson. Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with r distinct prime factors. *Amer. Journal Math.*, 35 :413–422, 1913.

[DJ90] N. Dershowitz and J.-P. Jouannaud. Rewrite systems. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science, vol. B*, chapter 6, pages 243–320. Elsevier Science, 1990.

[Fin85] A. Finkel. Une généralisation des théorèmes de Higman et de Simon aux mots infinis. *Theoretical Computer Science*, 38 :137–142, 1985.

[FS00] A. Finkel and Ph. Schnoebelen. Well-structured transition systems everywhere !, 2000. To appear in *Theor. Comp. Sci.*, available at `http://www.lsv.ens-cachan.fr/Publis/PAPERS/`.

[Hig52] G. Higman. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 2(7) :326–336, 1952.

[Jan99] P. Jančar. A note on well quasi-orderings for powersets. *Information Processing Letters*, 72(5–6) :155–161, 1999.

[Kru60] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95 :210–225, 1960.

[Kru72] J. B. Kruskal. The theory of well-quasi-ordering : A frequently discovered concept. *Journal Combinatorial Theory, Series A*, 13(3) :297–305, 1972.