TD6

Chargé de TD : Adrien Koutsos
adrien.koutsos@lsv.fr

Exercice 1
Montrer que le problème suivant est indécidable :
Donnée: f une fonction primitive récursive;
Question: f est elle identiquement nulle ?

Exercice 2
Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives, avec la convention que 0 correspond à $false$, et que tout les autres entiers correspondent à $true$.
— Les connecteurs logiques $\wedge, \vee, \neg$.
— La soustraction, avec la convention que $a - b = 0$ si $b > a$.
— L'égalité Eq et la fonction être pair $Even$.
— La division par deux $div_2(n) = m$ if $n = 2.m$ or $n = 2.m + 1$.

Exercice 3 (Schéma de minimisation bornée)
Étant données ψ et ξ récursives primitives, on définit

$$\phi(\vec{n}) = \min_{m \leq \psi(\vec{n})} (\xi(\vec{n}, m) = 0)$$

Montrer que ϕ est récursive primitive – on pourra renvoyer une valeur quelconque quand le minimum n'est pas atteint.

Exercice 4 (Codage des paires)
Montrer qu'il existe $J : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, et $K, L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

1. J, K et L sont récursives primitives,
2. J est une bijection et
3. on a $K(J(x, y)) = x$ et $L(J(x, y)) = y$ pour tous x, y.

Exercice 5 (Itération)
Soit g, h des fonctions primitives récursives, montrer que la fonction $It_{g,h}$ définie comme $It_{g,h}(n, x) =$

```
r = g(x)
for i = 1 to n do
  r = h(r,i-1);
done
return r
```

est primitive récursive.

Exercice 6
Montrer que la classe des fonctions primitives récursive est la plus petite classe contenant les fonctions de base et close par composition et itération.

Exercice 7 (Fibonacci)
Montrer que la fonction définie comme suit est récursive primitive :

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 1 \\ f(1) & = & 1 \\ f(n+2) & = & f(n+1)+f(n) \end{array}$$

Exercice 8
Montrer les propriétés suivantes des fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la hiérarchie de Grzegorczyk :
— Pour tout n, m, $\psi_n(m) \geq 1+m$
— Pour tout n, la fonction ψ_n est strictement croissante.
— Pour tout m, n, k, $\psi_n(m)+k \leq \psi_{n+k}(m)$.