Devoir de logique, novembre 2005: solution

PARTIE 1

1. $\mathsf{Atleast}_k(S)$ n'a aucun modèle si $k > |S|$
2. Si $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, par récurrence sur $k + |S|$, on définit
   - $\widehat{\mathsf{Atleast}_0}(S) = \{\top\}$
   - $\widehat{\mathsf{Atleast}_{k+1}}(\emptyset) = \{\bot\}$
   - $\widehat{\mathsf{Atleast}_{k+1}}(L + S) = \widehat{\mathsf{Atleast}_k}(S) \cup \{L \vee C \mid C \in \widehat{\mathsf{Atleast}_{k+1}}(S)\}$.

   Ce qui donne, si $|S| = m$:

   $$\widehat{\mathsf{Atleast}_k}(S) = \{ \bigvee_{L \in S'} L \mid S' \subseteq S, |S'| = m - k + 1\}$$

   Comme en I.3, on montre par récurrence sur $k + |S|$ que $\widehat{\phi}$ et ϕ ont les mêmes modèles. Le seul cas non trivial est le dernier. Si $I \models \mathsf{Atleast}_{k+1}(L + S)$, alors $I \models \mathsf{Atleast}_k(S)$ (et donc $\widehat{\mathsf{Atleast}_k}(S)$ par hypothèse de récurrence). D'autre part, ou bien $I \models L$, ou bien $I \models \mathsf{Atleast}_{k+1}(S)$ (et donc $\widehat{\mathsf{Atleast}_{k+1}}(S)$ par hypothèse de récurrence). Réciproquement, si $I \models \mathsf{Atleast}_k(S)$ et $I \models L$, alors $I \models \mathsf{Atleast}_{k+1}(S + L)$ et, si $I \models \mathsf{Atleast}_{k+1}(S)$, alors $I \models \mathsf{Atleast}_{k+1}(S + L)$.

   Considérons maintenant la transformation dans l'autre sens, qu'il suffit de définir pour les clauses:
   - $\widetilde{\bot} = \mathsf{Atleast}_1(\emptyset)$
   - $\widetilde{\top} = \mathsf{Atleast}_0(\emptyset)$
   - $\widetilde{L_1 \vee \ldots \vee L_p} = \mathsf{Atleast}_1(L_1, ..., L_p)$

   Cette transformation préserve les modèles.
3. **La règle R:** Si $I \models \mathsf{Atleast}_k(S_1 + S_2)$ et $I \models \mathsf{Atleast}_l(\overline{S_1} + S_3)$, alors

   $$\begin{aligned}
   &\sum_{P \in I} S_2(P) + S_3(P) + \sum_{P \notin I} S_2(\neg P) + S_3(\neg P) \\
   &\qquad \geq (\sum_{P \in I} S_2(P) + S_3(P) + S_1(P)) + (\sum_{P \notin I} S_2(\neg P) + S_3(\neg P) + S_1(\neg P)) - |S_1| \\
   &\qquad \geq (\sum_{P \in I} S_2(P) + S_3(P) + S_1(P)) + (\sum_{P \notin I} S_2(\neg P) + S_3(\neg P) + \overline{S_1}(P)) - |S_1| \\
   &\qquad \geq k + l - |S_1|
   \end{aligned}$$

   D'où $I \models \mathsf{Atleast}_{k+l-|S_1|}(S_2 + S_3)$.

   La règle F: Si $I \models \mathsf{Atleast}_k((p + 1)L + S_1 + S_2)$. Par l'absurde: si on avait $\sum_{P \in I}(L + S_1)(P) + \sum_{P \notin I}(L + S_1)(\neg P) = 0$, alors tous les éléments de la somme sont nuls et

   $$\begin{aligned}
   &\sum_{P \in I}((p + 1)L + S_1 + S_2)(P) + \sum_{P \notin I}((p + 1)L + S_1 + S_2)(\neg P) \\
   &\qquad = \sum_{P \in I} S_2(P) + \sum_{P \notin I} S_2(\neg P) \\
   &\qquad \leq |S_2|
   \end{aligned}$$

   Ce qui est absurde si $|S_2| = k - 1$.

4. On reprend la preuve de complétude de la résolution par les arbres sémantiques: on considère l'ensemble E^* de toutes les formules dérivables à partir de E et on veut montrer que, si E est insatisfaisable, alors E^* contient $\bot$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que E^* a un arbre sémantique non vide. Comme E^* est instatisfaisable, son arbre sémantique n'a que des feuilles d'échec. On considère alors une interprétation partielle I qui ne falsifie aucune formule de E^* et dont les deux extensions I_0 et I_1, qui prolongent I en interprétant Q respectivement à 0 et à 1, falsifient respectivement $\mathsf{Atleast}_k((p+1) \times Q + S)$ et $\mathsf{Atleast}_{k'}((p'+1) \times \neg Q + S')$.

   Soit $S = q \times (\neg Q) + S_1 + S_2$ où S_1 est le sous-multi-ensemble de S des littéraux falsifiés par I. S_2 contient des littéraux satisfaits par I. Comme la formule est falsifiée par I_0, $q + |S_2| < k$. On ajoute les littéraux qu'il faut pour compléter à $k-1$ (si c'est possible) et on obtient par F $\mathsf{Atleast}_1(Q + S_1) \in E^*$. Il reste le cas où ce n'est pas possible de compléter à $k-1$: $p + |S| + 1 < k$. Mais alors la formule est $\bot$!

   De même, si S'_1 est le sous-multi-ensemble des littéraux de S' qui sont falsifiés par I, par factorisation, on obtient que $\mathsf{Atleast}_1(\neg Q + S'_1) \in E^*$.

   Mais alors, par résolution, $\mathsf{Atleast}_1(S_1 + S'_1) \in E^*$, ce qui est absurde puisque I falsifie tous les littéraux de $S_1 + S'_1$. Il en résulte que l'arbre sémantique de S est réduit à la racine et donc que E^* contient une clause $\mathsf{Atleast}_k(S)$ falsifiée par l'interprétation vide. Ce n'est possible que si $k > 0$ et $S = \emptyset$. D'où $\bot \in E^*$.

5. Le système de règles d'inférence n'est pas complet: on ne peut pas prouver le tiers exclu, par exemple.

   On propose alors de rajouter les règles suivantes:

$$TE\ \frac{}{\mathsf{Atleast}_{|S|}(S + \overline{S})} \qquad A\ \frac{}{\mathsf{Atleast}_0(S)} \qquad D\ \frac{\mathsf{Atleast}_{kp+1}(pS)}{\mathsf{Atleast}_{k+1}(S)}$$

   On note aussi $\vdash$ la relation de déduction par résolution, factorisation, tiers exclu et affaiblissement et $\vdash_2$ la relation de déduction obtenue par TE, F, R, A eto $\vdash_1$ la relation de déduction obtenue grâce aux règles TE, F, R, A, D.

   Remarquons d'abord que l'ajout de l'affaiblissement et du tiers exclu ne sont pas suffisants: par exemple de $\mathsf{Atleast}_1(P+Q), \mathsf{Atleast}_1(Q+R), \mathsf{Atleast}_1(P+R)$, il n'est pas possible de déduire $\mathsf{Atleast}_2(P+Q+R)$ avec ces règles (et les règles R, F).

   L'ajout des règles ci-dessus conduit par contre à un système complet. Si en effet E est un ensemble de formules et ϕ une formule, tels que $E \models \phi$, alors, par complétude des règles de résolution+factorisation+tiers exclu+affaiblissement, $\hat{E} \vdash \hat{\phi}$ où $\hat{\psi}$ est l'ensemble des clauses décrites dans la question 2 :

$$\widehat{\mathsf{Atleast}_k}(S) = \{\mathsf{Atleast}_1(S')L \mid S' \subseteq S, |S'| = n - k + 1\}$$

   et $\widehat{E}$ est l'union des clauses $\hat{\psi}$ pour $\psi \in E$.

   On remarque alors que la résolution, la factorisation, le tiers exclu et l'affaiblissement peuvent être simulés par des inférence de notre système, que $E \vdash_2 \hat{E}$ et que $\hat{\phi} \vdash_1 \phi$, lorsque chaque clause $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ est identifiée à $\mathsf{Atleast}_1(L_1 + \ldots + L_n)$.

   Simulation de la résolution :

$$R\ \frac{\mathsf{Atleast}_1(L + S) \quad \mathsf{Atleast}_1(\overline{L} + S')}{\mathsf{Atleast}_1(S + S')}$$

Simulation de la factorisation :

$$F\ \frac{\mathsf{Atleast}_1(2L+S)}{\mathsf{Atleast}_1(L+S)}$$

Simulation du tiers exclu :

$$TE\ \frac{}{\mathsf{Atleast}_1(L+\overline{L})}$$

Simulation de l'affaiblissement:

$$R\ \frac{\mathsf{Atleast}_1(S) \qquad A\ \dfrac{}{\mathsf{Atleast}_0(S')}}{\mathsf{Atleast}_1(S+S')}$$

$E \vdash_2 \hat{E}$: On démontre que, si $\mathsf{Atleast}_k(S) \in E$, alors $\mathsf{Atleast}_k(S) \vdash_2 C$ pour toute clause $C \in \widehat{\mathsf{Atleast}_k}(S)$.

Remarquons que

$$R\ \frac{\mathsf{Atleast}_{k+1}(L+S) \quad \mathsf{Atleast}_0(\overline{L})}{\mathsf{Atleast}_k(S)}$$

Il en résulte que $\widehat{\mathsf{Atleast}_k}(S) \vdash_2 \mathsf{Atleast}_1(S')$ pour tout S' tel que $|S'| = |S| - k + 1$. (Formellement, par récurrence sur k).

D'où le résultat souhaité.

$\hat{\phi} \vdash_1 \phi$: avec $\phi = \mathsf{Atleast}_k(S)$. On procède par récurrence sur k. Si $k = 1$, alors $\hat{\phi} = \{\phi\}$. Si maintenant la propriété est vraie pour k. On note $S = L_1 + \ldots + L_n$ où les L_i sont des littéraux non nécessairement distincts. On remarque que $\widehat{\mathsf{Atleast}_{k+1}}(S)$ contient, pour tout i, $\mathsf{Atleast}_1(S')$ où $S' \subseteq S_i = L_1 + \ldots + L_{i-1} + L_{i+1} + \ldots + L_n$ et $|S'| = n - k + 1 = n - 1 - (k-1) + 1$. Ainsi, $\widehat{\mathsf{Atleast}_{k+1}}(S)$ contient $\widehat{\mathsf{Atleast}_k}(S_i)$ pour tout i. Par hypothèse de récurrence, on a donc, pour tout i, $\hat{\phi} \vdash_2 \mathsf{Atleast}_k(S_i)$. Par application répétée de la règle R (avec, à chaque fois un ensemble S_1 vide) on obtient alors

$$\hat{\phi} \vdash_2 \mathsf{Atleast}_{k\times n}(S_1 + \ldots + S_n)$$

soit $\hat{\phi} \vdash_2 \mathsf{Atleast}_{(n-1)\times k+k}((n-1)S)$. Mais: $\mathsf{Atleast}_{(n-1)\times k+k}((n-1)S) \vdash_2 \mathsf{Atleast}_{(n-1)\times k+1}((n-1)S)$ pour $k \geq 1$ (par affaiblissements et résolutions). Enfin,

$$D\ \frac{\mathsf{Atleast}_{(n-1)\times k+1}((n-1)S)}{\mathsf{Atleast}_{k+1}(S)}$$

Pour conclure la question, récapitulons: si $E \models \phi$, alors $\hat{E} \models \hat{\phi}$ et donc $\hat{E} \vdash \hat{\phi}$, mais, en simulant les règles d'inférence, on a aussi $\hat{E} \vdash_1 \hat{\phi}$. D'autre part, $E \vdash_1 \hat{E}$ et $\hat{\phi} \vdash_1 \phi$ d'où en fin de compte $E \vdash_1 \phi$.

6. Les codages de la question 2 montrent que les deux systèmes ont même pouvoir d'expression.

Partie 2

On associe à chaque sommet v du graphe (ou case de la grille) une variable propositionnelle P_v. A une configuration f on peut alors associer l'ensemble des formules ϕ_v, pour tout v dans le domaine de définition de f:

$$\phi_v = \mathsf{Atleast}_{f(v)}(\{P_{v'} \mid (v, v') \in E\}) \wedge \mathsf{Atmost}_{f(v)}(\{P_{v'} \mid (v, v') \in E\})$$

qui exprime qu'exactement $f(v)$ voisins de v sont interprétés à 1. Ainsi que la formule

$$\phi_{G,n} = \mathsf{Atleast}_n(\{P_v \mid v \in V\}) \wedge \mathsf{Atleast}_n(\{P_v \mid v \in V\})$$

Ces formules, exprimées dans le formalisme de la partie I se traduisent aisément dans le formalisme de la partie II.

$I(v)$ est à coup sûr 1 resp. 0) ssi $E \models P_v$ (resp. $E \models \neg P_v$), où E est l'ensemble des formules ci-dessus.

Un système de déduction complet permet donc de déterminer les sommets v tels qu'à coup sur $I(v) = 1$ (resp. $I(v) = 0$).

Les questions I.3 et II.2 montrent que c'est possible en passant par le calcul propositionnel. Mais cette méthode sera très coûteuse dans la mesure où la traduction est exponentielle. Les deux parties tentaient donc de donner un système de déduction plus efficace (et complet).