Calculabilité 2005
Partiel du 21 novembre

17 novembre 2005

Les exercices sont indépendants. Les documents sont autorisés. Seuls les résultats vus en cours, en devoir ou en TD peuvent être utilisés. Durée : 3h. La longueur des solutions et le barême sont donnés à titre indicatif.

1

1. Montrer que la fonction d'exponentiation sur les entiers (x^y ; par convention $0^0 = 1$) est une fonction primitive récursive.
2. Montrer que l'égalité des fonctions primitives récursives est indécidable (i.e. donnée : deux fonctions primitives récursives f, g sous la forme $\mathsf{Comp}_m(\mathsf{Prim}...)$; question : a-t-on $\forall \vec{n} \in \mathbb{N}^k,\ f(\vec{n}) = g(\vec{n})$?)

[8 lignes, 4 points]

2

Donner explicitement la table d'une machine de Turing qui, étant donné un mot $w \in \{0,1\}^*$, accepte w si w contient au moins autant de 0 que de 1 et rejette sinon. (On prendra soin de démontrer que la machine fait bien ce qu'elle est censée faire).

[22 lignes, 5 points]

3

Parmi les problèmes suivants, lesquels sont (in)décidables ? (Justifier succinctement la réponse)

1. Étant donnés une machine de Turing M, un mot w et un entier n en base 2, M s'arrête-t-elle sur w en moins de n étapes de calcul ?
2. Étant donnés une machine de Turing M, un entier n, M s'arrête-t-elle en moins de n étapes pour tout mot w ?

[11 lignes, 4 points]

4

1. On dit qu'une machine de Turing M *boucle* sur la donnée w si M passe deux fois dans la même configuration : $q, \epsilon, \$w \vdash_M^* q_1, w_1, w_2 \vdash_M^+ q_1, w_1, w_2$. Montrer que le problème de savoir si, étant donné M, M boucle sur la donnée vide, est indécidable.
2. Un *automate linéairement borné* est une machine de Turing dont l'espace de travail est limité à droite par l'extrémité du mot d'entrée. Autrement dit, pour tout état q, la transition $\delta(q, B)$, si elle existe, est de la forme $(B, q', \leftarrow)$. Montrer que le problème suivant (arrêt universel des automates linéairement bornés) est indécidable :

   Donnée : Un automate linéairement borné A

   Question : est ce que, pour tout mot w, A s'arrête sur la donnée w ?

[13 lignes, 5 points]

5

Montrer que le Problème de correspondance de Post reste indécidable lorsque tous les mots des deux séquences ont pour longueur au plus 2.

Qu'en est il si tous les mots ont pour longueur 2 ?

[24 lignes, 5 points]